

FIBRÉ VECTORIEL DE 0-CORRÉLATION PONDÉRÉ SUR L'ESPACE \mathbb{P}^{2n+1}

MOHAMED BAHTITI

RÉSUMÉ. Nous étudions dans cet article une nouvelle famille de fibrés vectoriels symplectiques algébriques stables de rang $2n$ sur l'espace projectif complexe \mathbb{P}^{2n+1} dont le fibré de corrélation nulle classique fait partie. Nous montrons que cette famille est invariante par rapport aux déformations miniversales. Nous étudions également les conditions cohomologiques suffisantes pour qu'un fibré vectoriel symplectique sur une variété projective soit stable.

ABSTRACT. We study in this paper a new family of stable algebraic symplectic vector bundles of rank $2n$ on the complex projective space \mathbb{P}^{2n+1} whose classical null correlation bundles belongs. We show that these bundles are invariant under a miniversal deformation. We also study the sufficient cohomological conditions for a symplectic vector bundle on a projective variety to be stable.

Date: August, 2015.

2010 Mathematics Subject Classification. 14D21, 14D20, 14J60, 14F05, 14D15.

Mots-clés. fibré de corrélation nulle, stabilité, déformation miniversale, espace de Kuranishi.

Key words. null correlation bundles, stability, miniversal deformation, Kuranishi space.

1. Introduction

Les fibrés vectoriels algébriques non-décomposables connus de rang $n - 1$ sur l'espace projectif complexe \mathbb{P}^n pour $n \geq 6$ sont rares. Les familles de fibrés vectoriels seulement connues sont la famille de fibrés de Tango pondérés de rang $n - 1$ [9] et celle de fibrés instantons de rang $n - 1$ pour n impair [24].

La famille de fibrés instantons présente un lien important entre la géométrie algébrique et la physique mathématique, en particulier la théorie de Yang-Mills. Cette famille de fibrés a été construite sur \mathbb{P}^3 par Atiyah, Drenfeld, Hitchin et Manin [6] et correspond, grâce à la correspondance de Penrose-Ward, aux solutions auto-duales (instantons) des $SU(2)$ -équations de Yang-Mills sur la sphère euclidienne S^4 [6, 11, 4, 5]. Suite à la généralisation de la correspondance de Penrose-Ward sur l'espace projectif complexe de dimension impaire par Salamon [27], la famille de fibrés instantons a été généralisée sur \mathbb{P}^{2n+1} par Okonek et Spindler [24]. Ensuite Spindler et Trautmann ont étudié la famille de fibrés instantons spéciaux [28].

Les fibrés instantons spéciaux de nombre quantique 1 sont des fibrés de corrélation nulle classiques sur \mathbb{P}^{2n+1} et sont la cohomologie de monades de type

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-1) \xrightarrow{B} \mathbb{C}^{2n+2} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \xrightarrow{A} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(1) \longrightarrow 0,$$

où

$$A = \begin{pmatrix} y_n & \dots & y_0 & ; & -x_n & \dots & -x_0 \end{pmatrix}, \quad B = {}^T \begin{pmatrix} x_0 & \dots & x_n & ; & y_0 & \dots & y_n \end{pmatrix},$$

$x_0, x_1, \dots, x_n, y_0, y_1, \dots, y_n$ étant des formes linéaires sans zéro commun sur \mathbb{P}^{2n+1} .

En particulier nous nous intéressons à la généralisation de ces fibrés qui ont été étudiés sur \mathbb{P}^3 par Ein [12], sur \mathbb{P}^5 par Ancona et Ottaviani pour la première classe de Chern $c_1 = 0$ [2] et qui ont été définis sur \mathbb{P}^{2n+1} par Migliore, Nagel et Peterson [22]. Plus précisément, soient $\gamma > 0$ et $\zeta = 0, 1$ et λ_i des entiers naturels pour $i = 0, 1, 2, \dots, n$ tels que

$$\gamma - \zeta > \lambda_n \geq \lambda_{n-1} \geq \dots \geq \lambda_0 \geq 0.$$

Soient $g_i \in H^0(\mathbb{P}^{2n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma - \lambda_i - \zeta))$ et $f_i \in H^0(\mathbb{P}^{2n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma + \lambda_{n-i}))$ des formes homogènes sur \mathbb{P}^{2n+1} sans zéro commun sur \mathbb{P}^{2n+1} . Les fibrés de corrélation nulle pondérés (les fibrés de 0-corrélation pondérés) sont la cohomologie de monades de type

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma - \zeta) \xrightarrow{B} \mathcal{H}_\zeta \xrightarrow{A} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma) \longrightarrow 0,$$

où

$$A = \begin{pmatrix} g_n & \dots & g_0 & ; & -f_n & \dots & -f_0 \end{pmatrix}, \quad B = {}^T \begin{pmatrix} f_0 & \dots & f_n & ; & g_0 & \dots & g_n \end{pmatrix},$$

et

$$\mathcal{H}_\zeta := \bigoplus_{i=0}^n (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\lambda_{n-i})) \oplus \bigoplus_{i=0}^n (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\lambda_i - \zeta)).$$

La cohomologie \mathcal{N}_ζ de la monade précédente est un fibré vectoriel symplectique normalisé de rang $2n$ sur \mathbb{P}^{2n+1} pour laquelle les conditions suivantes sont équivalentes (théorème 4.13)

I- $\gamma - \zeta n > \sum_{i=0}^n \lambda_i$.

II- \mathcal{N}_ζ est stable.

III- \mathcal{N}_ζ est simple.

Les déformations miniversales d'un tel fibré \mathcal{N}_ζ sont encore des fibrés de 0-corrélation pondérés sur \mathbb{P}^{2n+1} et l'espace de Kuranishi du fibré \mathcal{N}_ζ est lisse au point correspondant de \mathcal{N}_ζ (théorème 5.8). Les conditions cohomologiques suffisantes pour qu'un fibré vectoriel symplectique sur une variété projective soit stable sont énoncées dans le théorème 2.5.

Je tiens à exprimer ma gratitude au directeur de ma thèse M. J.-M. Drézet et au professeur G. Ottaviani pour des discussions utiles. Je remercie également toutes les personnes qui ont contribué à m'aider à réaliser mes travaux. Cet article fait partie de ma thèse.

2. Préliminaires

2.1. Définition. On définit la *résolution de Koszul généralisée* de la suite exacte des fibrés

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

par

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathcal{S}^i A \longrightarrow \mathcal{S}^{i-1} A \otimes B \longrightarrow \mathcal{S}^{i-2} A \otimes \bigwedge^2 B \longrightarrow \mathcal{S}^{i-3} A \otimes \bigwedge^3 B \longrightarrow \mathcal{S}^{i-4} A \otimes \bigwedge^4 B \longrightarrow \dots \\ \dots \longrightarrow \mathcal{S}^2 A \otimes \bigwedge^{i-2} B \longrightarrow A \otimes \bigwedge^{i-1} B \longrightarrow \bigwedge^i B \longrightarrow \bigwedge^i F \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Soient $rg(F) = r$, et $c_1(F) = c$. On a $\bigwedge^{r-i} F^* = \bigwedge^r F^* \otimes \bigwedge^i F = \bigwedge^i F(-c)$. En tensorisant la résolution de Koszul généralisée par $\bigwedge^r F^*$, on obtient une résolution pour $\bigwedge^{r-i} F^*$

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathcal{S}^i A(-c) \longrightarrow \mathcal{S}^{i-1} A \otimes B(-c) \longrightarrow \mathcal{S}^{i-2} A \otimes \bigwedge^2 B(-c) \longrightarrow \\ \mathcal{S}^{i-3} A \otimes \bigwedge^3 B(-c) \longrightarrow \mathcal{S}^{i-4} A \otimes \bigwedge^4 B(-c) \longrightarrow \dots \\ \dots \longrightarrow \mathcal{S}^2 A \otimes \bigwedge^{i-2} B(-c) \longrightarrow A \otimes \bigwedge^{i-1} B(-c) \longrightarrow \bigwedge^i B(-c) \longrightarrow \bigwedge^{r-i} F^* \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

2.2. Définition. Soit E un fibré vectoriel de rang $2r$ sur une variété projective X . On dit que le fibré E est *symplectique* si et seulement s'il existe un entier $b \in \mathbb{Z}$ et un isomorphisme de fibrés

$$\varphi : E \longrightarrow E^*(b) \text{ tel que } \varphi^* = -\varphi.$$

Autrement dit, le fibré E est symplectique si et seulement s'il existe une forme symplectique non-dégénérée $\varpi \in H^0(\bigwedge^2 E(-b))$. Dans ce cas, la première classe de Chern de E est $c_1(E) = br$.

Nous allons développer les conditions cohomologiques suffisantes pour qu'un fibré vectoriel symplectique de rang $2r$ sur une variété projective X soit stable. Le lemme suivant est une généralisation de ([1], Lemme 1.10).

2.3. Lemme. Soit E un fibré vectoriel symplectique de rang $2r$ 2.2 sur une variété projective X . Pour tout $1 \leq j \leq r-1$, le fibré \mathcal{O}_X est un supplémentaire dans le fibré $\bigwedge^{2j} E(-bj)$ et le fibré E est un supplémentaire dans le fibré $\bigwedge^{2j+1} E(-bj)$. Autrement dit, on a

$$\bigwedge^{2j} E(-bj) \simeq \mathcal{O}_X \oplus B_j$$

$$\bigwedge^{2j+1} E(-bj) \simeq E \oplus A_j.$$

Démonstration. Pour tout $i \leq r$. On a une forme non-dégénérée $\varpi \in H^0(\bigwedge^2 E(-b))$, donc on peut définir un morphisme injectif Φ qui est localement donné par

$$\Phi : \bigwedge^{i-2} E \longrightarrow \bigwedge^i E(-b)$$

$$e_1 \wedge \dots \wedge e_{i-2} \longmapsto e_1 \wedge \dots \wedge e_{i-2} \wedge \varpi.$$

Alors pour $i = 2j$, le fibré \mathcal{O}_X est un supplémentaire dans le fibré $\bigwedge^{2j} E(-jb)$. Pour $i = 2j+1$, le fibré E est aussi un supplémentaire dans le fibré $\bigwedge^{2j+1} E(-jb)$. □

2.4. Remarque. Pour tout fibré vectoriel, le fibré $\bigwedge^{j+1} E$ est un supplémentaire dans le fibré $E \otimes \bigwedge^j E$, où $j \geq 0$. C'est-à-dire, on a un morphisme injectif localement donné par

$$\Phi : \bigwedge^{j+1} E \longrightarrow E \otimes \bigwedge^j E$$

$$e_1 \wedge \dots \wedge e_{j+1} \longmapsto \frac{1}{j+1} \sum_{i=1}^{j+1} (-1)^{j-i+1} (e_1 \wedge \dots \wedge \widehat{e_i} \wedge \dots \wedge e_{j+1}) \otimes e_i.$$

Le théorème suivant est une généralisation de ([1], théorème 3.5).

2.5. Théorème. Soient E un fibré vectoriel symplectique de rang $2r$, $E \simeq E^*(b)$ où $b \in \mathbb{Z}$, sur une variété projective X avec $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$, et $1 \leq 2j+1 \leq r$ un entier. On a

1- Soient $b \geq 0$, et

$$I) h^0(\bigwedge^{2j+1} E) = 0,$$

$$II) h^0(E(-b(j+1)) \otimes \bigwedge^{2j+1} E) = 1.$$

Alors E est stable (au sens de Mumford-Takemato).

2- Soient $b \leq 0$, et

$$I) h^0(\bigwedge^{2j+1} E^*) = 0,$$

$$II) h^0(E^*(b(j+1)) \otimes \bigwedge^{2j+1} E^*) = 1.$$

Alors E est stable (au sens de Mumford-Takemato).

Démonstration. 1- Pour $b \geq 0$. Premièrement, supposons que l'on ait Z_1 un sous-faisceau de fibré E de rang $2t_1 + 1$ qui déstabilise le fibré E . D'après la définition de la stabilité on a $c_1(Z_1) = m_1 \geq 0$, alors on a la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow Z_1 \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

où G est un faisceau sans torsion. En appliquant la résolution de Koszul 2.1, on a

$$0 \longrightarrow \bigwedge^{2t_1+1} Z_1 \longrightarrow \bigwedge^{2t_1+1} E,$$

qui donne le morphisme

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(m_1) \longrightarrow \bigwedge^{2t_1+1} E,$$

on obtient

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_X \xrightarrow{\quad} \bigwedge^{2t_1+1} E(-m_1) \\ & & \searrow \varphi \quad \swarrow \\ & & \bigwedge^{2t_1+1} E \end{array}$$

Donc le morphisme φ est une section de fibré $\bigwedge^{2t_1+1} E$, ce qui contredit $h^0(\bigwedge^{2t_1+1} E) = 0$.

Deuxièmement. Supposons que l'on ait Z un sous-faisceau de fibré E de rang $2t+2$ et $c_1(Z) = m$ qui déstabilise le fibré E , alors on a la suite exacte suivante

$$(*) \quad 0 \longrightarrow Z \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

où G est un faisceau sans torsion. En appliquant la résolution de Koszul 2.1, on a

$$0 \longrightarrow \bigwedge^{2t+2} Z \xrightarrow{f} \bigwedge^{2t+2} E \xrightarrow{g} G \otimes \bigwedge^{2t+1} E \longrightarrow \dots$$

qui donne

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(m - b(t+1)) \xrightarrow{f} \bigwedge^{2t+2} E(-b(t+1)) \xrightarrow{g} G(-b(t+1)) \otimes \bigwedge^{2t+1} E \longrightarrow \dots$$

où on a $g.f = 0$. En tensorisant la suite exacte $(*)$ par le fibré $\bigwedge^{2t+1} E(-b(t+1))$, on obtient la suite exacte suivante

$$(**) \quad 0 \longrightarrow Z \otimes \bigwedge^{2t+1} E(-b(t+1)) \longrightarrow E(-b(t+1)) \otimes \bigwedge^{2t+1} E \xrightarrow{h} G(-b(t+1)) \otimes \bigwedge^{2t+1} E \longrightarrow 0.$$

Mais d'après la remarque 2.4, on a

$$\bigwedge^{2t+2} E(-b(t+1)) \subset E(-b(t+1)) \otimes \bigwedge^{2t+1} E,$$

alors on obtient que $h|_{\bigwedge^{2t+2} E(-b(t+1))} = g$. D'après le lemme 2.3, on obtient

$$\mathcal{O}_X \oplus B_t \cong \bigwedge^{2t+2} E(-b(t+1)) \subset E(-b(t+1)) \otimes \bigwedge^{2t+1} E,$$

qui donne, d'après (II), $h^0(B_t) = 0$. Donc on obtient que

$$f(\mathcal{O}_X(m - b(t+1))) \subset \mathcal{O}_X, \quad g(\mathcal{O}_X) = 0 \text{ et } h(\mathcal{O}_X) = 0.$$

En prenant la cohomologie de la suite exacte $(**)$, on obtient la résolution suivante

$$0 \longrightarrow H^0(Z(-b) \otimes \bigwedge^{2t+1} E(-bt)) \longrightarrow H^0(E(-b) \otimes \bigwedge^{2t+1} E(-bt)) \xrightarrow{H^0(h)}$$

$$H^0(G(-b(t+1)) \otimes \bigwedge^{2t+1} E) \longrightarrow \dots$$

Comme

$$\mathcal{O}_X \subset \bigwedge^{2t+2} E(-b(t+1)) \subset E(-b) \otimes \bigwedge^{2t+1} E(-bt) \simeq \mathcal{H}om(\bigwedge^{2t+1} E^*(bt), E(-b)),$$

alors on a un morphisme non nul $\varphi : \bigwedge^{2t+1} E^*(bt) \longrightarrow E(-b)$ correspondant à \mathcal{O}_X tel que $H^0(h)(\varphi) = 0$. Donc il existe un morphisme surjectif ψ dans $\mathcal{H}om(\bigwedge^{2t+1} E^*(bt), Z(-b))$ projecté sur \mathcal{O}_X tel que

$$\begin{array}{ccccc} \bigwedge^{2t+1} E^*(bt) & \xrightarrow{\varphi} & E(-b) & \longrightarrow & 0 \\ & \searrow \psi & \nearrow & & \\ & Z(-b) & & & \\ & \nearrow & \searrow & & \\ 0 & & 0 & & \end{array}$$

Mais c'est une contradiction au fait que la condition $h^0(E(-b(t+1)) \otimes \bigwedge^{2t+1} E) = 1$ entraîne que φ est le seul morphisme surjectif non nul projecté sur la supplémentaire \mathcal{O}_X (voir 2.3). Donc E est stable.

2- Si $b \leq 0$. On considère $((E^*)^*(-b) \simeq E^*$. Comme on a

$$h^0(\bigwedge^{2j+1} E^*) = 0, \quad h^0(E^*(b(j+1)) \otimes \bigwedge^{2j+1} E^*) = 1$$

alors, d'après (1), E^* est stable. Donc E est stable.

□

2.6. Remarque. Soit E un fibré symplectique de rang $2r$ sur une variété projective X , $E \simeq E^*(b)$ pour un $b \in Z$. Alors le fibré normalisé de E est un cas parmi les deux cas suivants

- Soient $b = 2m - \zeta$ et $\zeta = 0, 1$. Alors on a $E(-m) \simeq (E(-m))^*(-\zeta)$ et le fibré normalisé de E est $E(-m)$ avec $c_1(E(-m)) = -\zeta r$.

3. Fibré vectoriel de 0-corrélation pondéré

Soient V un espace vectoriel complexe de dimension $2n + 2$, et $\mathbb{P}^{2n+1} = \mathbb{P}(V)$ l'espace projectif complexe associé dont les points sont les droites de V . Soient $\gamma > 0$, $n \geq 1$, $\zeta = 0, 1$ et λ_i des entiers naturels pour $i = 0, 1, 2, \dots, n$ tels que

$$\gamma - \zeta > \lambda_n \geq \lambda_{n-1} \geq \dots \geq \lambda_0 \geq 0.$$

Soient $g_i \in H^0(\mathbb{P}^{2n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma - \lambda_i - \zeta))$ et $f_i \in H^0(\mathbb{P}^{2n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma + \lambda_{n-i}))$ des formes homogènes sur \mathbb{P}^{2n+1} sans zéro commun sur \mathbb{P}^{2n+1} . On considère la $(2n + 2) \times 1$ -matrice

$$B = {}^T \begin{pmatrix} f_0 & \dots & f_n & ; & g_0 & \dots & g_n \end{pmatrix}$$

et la $1 \times (2n + 2)$ -matrice

$$A = \begin{pmatrix} g_n & \dots & g_0 & ; & -f_n & \dots & -f_0 \end{pmatrix}$$

qui vérifient $A.B = 0$. On considère aussi le fibré

$$\mathcal{H}_\zeta := \bigoplus_{i=0}^n (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\lambda_{n-i})) \oplus \bigoplus_{i=0}^n (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\lambda_i - \zeta)).$$

On obtient un isomorphisme canonique $\mathcal{H}_\zeta \simeq \mathcal{H}_\zeta^*(-\zeta)$. Tout cela nous donne la monade suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma - \zeta) \xrightarrow{B} \mathcal{H}_\zeta \xrightarrow{A} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma) \longrightarrow 0.$$

On en déduit les suites exactes suivantes

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma - \zeta) \xrightarrow{B} \mathcal{H}_\zeta \longrightarrow \mathcal{Q}_{\zeta; \gamma; \lambda_n, \lambda_{n-1}, \dots, \lambda_0} \longrightarrow 0,$$

où $\mathcal{Q}_{\zeta; \gamma; \lambda_n, \lambda_{n-1}, \dots, \lambda_0}$ est un fibré vectoriel de rang $2n + 1$ sur \mathbb{P}^{2n+1} et

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_{\zeta; \gamma; \lambda_n, \lambda_{n-1}, \dots, \lambda_0} \longrightarrow \mathcal{Q}_{\zeta; \gamma; \lambda_n, \lambda_{n-1}, \dots, \lambda_0} \xrightarrow{A} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma) \longrightarrow 0,$$

où $\mathcal{N}_{\zeta; \gamma; \lambda_n, \lambda_{n-1}, \dots, \lambda_0}$ est un fibré vectoriel de rang $2n$ sur \mathbb{P}^{2n+1} . Autrement dit, le fibré vectoriel $\mathcal{N}_{\zeta; \gamma; \lambda_n, \lambda_{n-1}, \dots, \lambda_0}$ est la cohomologie de la monade précédente. Le fibré $\mathcal{N}_{\zeta; \gamma; \lambda_n, \lambda_{n-1}, \dots, \lambda_0}$ a été étudié sur \mathbb{P}^3 par Ein [12], sur \mathbb{P}^5 par Ancona et Ottaviani pour $\zeta = 0$ [2], et a été défini sur \mathbb{P}^{2n+1} par Migliore, Nagel et Peterson [22].

3.1. Définition. On appelle le fibré $\mathcal{Q}_{\zeta; \gamma; \lambda_n, \lambda_{n-1}, \dots, \lambda_0}$ le fibré de quotient pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} des poids $\gamma; \lambda_n, \lambda_{n-1}, \dots, \lambda_0$, et on appelle le fibré $\mathcal{N}_{\zeta; \gamma; \lambda_n, \lambda_{n-1}, \dots, \lambda_0}$ le fibré de 0-corrélation pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} des poids $\gamma; \lambda_n, \lambda_{n-1}, \dots, \lambda_0$ avec $c_1 = -\zeta n$ et d'une charge topologique

$$c_2 = \gamma^2 - \sum_{i=0}^n \lambda_i^2 + \zeta(\gamma + \zeta \frac{n \cdot (n-1)}{2} - \sum_{i=0}^n \lambda_i).$$

On va utiliser \mathcal{Q}_ζ , \mathcal{N}_ζ à la place de $\mathcal{Q}_{\zeta; \gamma; \lambda_n, \lambda_{n-1}, \dots, \lambda_0}$, $\mathcal{N}_{\zeta; \gamma; \lambda_n, \lambda_{n-1}, \dots, \lambda_0}$ respectivement. On a donc la monade suivante

$$(1) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma - \zeta) \xrightarrow{B} \mathcal{H}_\zeta \xrightarrow{A} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma) \longrightarrow 0$$

et les suites exactes suivantes

$$(2) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma - \zeta) \xrightarrow{B} \mathcal{H}_\zeta \longrightarrow \mathcal{Q}_\zeta \longrightarrow 0,$$

et

$$(3) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{N}_\zeta \longrightarrow \mathcal{Q}_\zeta \xrightarrow{A} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma) \longrightarrow 0.$$

On en déduit que $c_1(\mathcal{Q}_\zeta) = \gamma - \zeta n$. Soit J une $(2n+2) \times (2n+2)$ -matrice symplectique

$$J = \begin{pmatrix} & & & & -1 \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & \\ & & & 1 & \\ & & \ddots & & \\ & & & & 0 \\ 1 & & & & \end{pmatrix}.$$

Alors on a $J^2 = -I$ et ${}^T B = -A(-\zeta).J$ et ${}^T A = -J.B(-\zeta)$.

3.2. Proposition. *Le fibré de 0-corrélation pondéré \mathcal{N}_ζ sur \mathbb{P}^{2n+1} est un fibré symplectique.*

Démonstration. Le fibré \mathcal{N}_ζ^* est la cohomologie de la monade suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma) \xrightarrow{-J.B(-\zeta)} \mathcal{H}_\zeta \xrightarrow{-A(-\zeta).J} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma + \zeta) \longrightarrow 0$$

où $J^2 = -I$, ${}^T B = -A(-\zeta).J$ et ${}^T A = -J.B(-\zeta)$. Donc l'isomorphisme de monades suivant

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma - \zeta) & \xrightarrow{B} & \mathcal{H}_\zeta & \xrightarrow{A} & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow J & & \downarrow I(-\zeta) \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma - \zeta) & \xrightarrow{-J.B(-\zeta)} & \mathcal{H}_\zeta^*(-\zeta) & \xrightarrow{-A(-\zeta).J} & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma) \longrightarrow 0 \end{array}$$

induit un isomorphisme $\varphi : \mathcal{N}_\zeta \longrightarrow \mathcal{N}_\zeta^*(-\zeta)$. En transposant le diagramme précédent, les flèches verticales sont multipliées par -1 . Donc on obtient ${}^T \varphi(-\zeta) = -\varphi$. □

3.3. Proposition. *Soient \mathcal{Q}_ζ le fibré de quotient pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} et \mathcal{N}_ζ le fibré de 0-corrélation pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} qui sont définis par les suites exactes 2 et 3. Alors on a*

I) \mathcal{Q}_ζ est stable si et seulement si $\gamma - \zeta n > (2n+1)\lambda_n$.

II) Si \mathcal{Q}_ζ est stable, alors \mathcal{N}_ζ est simple.

Démonstration. Le théorème 2.7, [7] donne (I).

Pour démontrer II), supposons que \mathcal{Q}_ζ est stable. En tensorisant la suite 3 par \mathcal{N}_ζ , on obtient la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_\zeta \otimes \mathcal{N}_\zeta^* \longrightarrow \mathcal{Q}_\zeta \otimes \mathcal{N}_\zeta^* \xrightarrow{A} \mathcal{N}_\zeta^*(\gamma) \longrightarrow 0.$$

Alors on a

$$h^0(\mathcal{N}_\zeta \otimes \mathcal{N}_\zeta^*) \leq h^0(\mathcal{Q}_\zeta \otimes \mathcal{N}_\zeta^*).$$

D'après le lemme 2.3 et la proposition 3.2, on a que

$$1 \leq h^0(\mathcal{N}_\zeta \otimes \mathcal{N}_\zeta^*).$$

On tensorise la suite duale de la suite 3 par \mathcal{Q}_ζ ce qui permet d'obtenir la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{Q}_\zeta(-\gamma) \xrightarrow{TA} \mathcal{Q}_\zeta \otimes \mathcal{Q}_\zeta^* \longrightarrow \mathcal{Q}_\zeta \otimes \mathcal{N}_\zeta^* \longrightarrow 0.$$

Cependant, de la suite 2 on a

$$h^0(\mathcal{Q}_\zeta(-\gamma)) = h^1(\mathcal{Q}_\zeta(-\gamma)) = 0.$$

Alors on a

$$h^0(\mathcal{N}_\zeta^* \otimes \mathcal{Q}_\zeta) = h^0(\mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \mathcal{Q}_\zeta).$$

Mais, \mathcal{Q}_ζ est stable. On en déduit que $h^0(\mathcal{N}_\zeta \otimes \mathcal{N}_\zeta^*) = 1$.

□

3.4. Remarque. Pour la suite exacte 2, on a la résolution suivante

$$\begin{aligned} (4) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-(\gamma + \zeta)q) \longrightarrow \mathcal{H}(-(\gamma + \zeta)(q - 1)) \longrightarrow \bigwedge^2 \mathcal{H}(-(\gamma + \zeta)(q - 2)) \\ \xrightarrow{a_{q-2}} \bigwedge^3 \mathcal{H}(-(\gamma + \zeta)(q - 3)) \xrightarrow{a_{q-3}} \dots \\ \dots \xrightarrow{a_3} \bigwedge^{q-2} \mathcal{H}(-2(\gamma + \zeta)) \xrightarrow{a_2} \bigwedge^{q-1} \mathcal{H}(-(\gamma + \zeta)) \xrightarrow{a_1} \bigwedge^q \mathcal{H} \xrightarrow{a_0} \bigwedge^q \mathcal{Q} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

où $1 \leq q \leq 2n + 1$. Pour la suite exacte 2, on a aussi la résolution suivante

$$\begin{aligned} (5) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma(2n + 2 - q) + \zeta(-(n + 1) + q)) \longrightarrow \bigwedge^{2n+1} \mathcal{H}_\zeta(-\gamma(2n + 1 - q) + \zeta q) \\ \longrightarrow \bigwedge^{2n} \mathcal{H}_\zeta(-\gamma(2n - q) + \zeta q) \xrightarrow{a_{2n-1-q}} \bigwedge^{2n-1} \mathcal{H}_\zeta(-\gamma(2n - 1 - q) + \zeta q) \xrightarrow{a_{2n-2-q}} \dots \\ \dots \xrightarrow{a_{n+2-q}} \bigwedge^{n+2} \mathcal{H}_\zeta(-\gamma(n + 2 - q) + \zeta q) \xrightarrow{a_{n+1-q}} \bigwedge^{n+1} \mathcal{H}_\zeta(-\gamma(n + 1 - q) + \zeta q) \\ \xrightarrow{a_{n-q}} \bigwedge^n \mathcal{H}_\zeta(-\gamma(n - q) + \zeta q) \xrightarrow{a_{n-1-q}} \dots \\ \dots \xrightarrow{a_3} \bigwedge^{q+3} \mathcal{H}_\zeta(-3\gamma + \zeta q) \xrightarrow{a_2} \bigwedge^{q+2} \mathcal{H}_\zeta(-2\gamma + \zeta q) \xrightarrow{a_1} \bigwedge^{q+1} \mathcal{H}_\zeta(-\gamma + \zeta q) \xrightarrow{a_0} \bigwedge^q \mathcal{Q}_\zeta^* \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

où $1 \leq q < 2n + 1$. Pour la suite exacte duale de la suite 3

$$(6) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma) \longrightarrow \mathcal{Q}_{\zeta}^* \longrightarrow \mathcal{N}_{\zeta}^* \longrightarrow 0,$$

on a la résolution suivante

$$(7) \quad \begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-q\gamma) \longrightarrow \mathcal{Q}_{\zeta}^*(-\gamma(q-1)) \longrightarrow \bigwedge^2 \mathcal{Q}_{\zeta}^*(-\gamma(q-2)) \\ \xrightarrow{a_{q-2}} \bigwedge^3 \mathcal{Q}_{\zeta}^*(-\gamma(q-3)) \xrightarrow{a_{q-3}} \dots \\ \dots \xrightarrow{a_3} \bigwedge^{q-2} \mathcal{Q}_{\zeta}^*(-2\gamma) \xrightarrow{a_2} \bigwedge^{q-1} \mathcal{Q}_{\zeta}^*(-\gamma) \xrightarrow{a_1} \bigwedge^q \mathcal{Q}_{\zeta}^* \xrightarrow{a_0} \bigwedge^q \mathcal{N}_{\zeta}^* \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

où $1 \leq q \leq 2n$.

4. Stabilité de fibré de 0-corrélation pondéré

Nous allons trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que le fibré de 0-corrélation pondéré \mathcal{N}_ζ sur \mathbb{P}^{2n+1} soit stable.

4.1. Lemme. *Soient p, q, k des entiers. Soit \mathcal{H}_ζ un fibré comme dans 3.1 pour $\zeta = 0$.*

I- Pour $k \geq \gamma$ et $1 \leq q \leq 2n+1$, on a

$h^0(\bigwedge^q \mathcal{H}_\zeta(-k)) = 0$ si et seulement si $\gamma > \sum_{i=0}^{\min(q-1, n)} \lambda_{n-i}$. En particulier, on a

$$h^0(\bigwedge^q \mathcal{H}_\zeta(-k)) = 0 \text{ si } \gamma > \sum_{i=0}^n \lambda_i.$$

II- Pour $k \geq 2$ et $1 \leq p, q \leq 2n+1$, on a

$$h^0((\bigwedge^p \mathcal{H}_\zeta) \otimes \bigwedge^q \mathcal{H}_\zeta(-k\gamma)) = 0 \text{ si } \gamma > \sum_{i=0}^n \lambda_i.$$

Démonstration. Pour démontrer (I), on a que

$$\max\{t \in \mathbb{Z} \mid \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(t) \subseteq \bigwedge^q \mathcal{H}_\zeta\} = \sum_{i=0}^{\min(q-1, n)} \lambda_{n-i}.$$

Donc pour $k \geq \gamma$, on obtient

$$h^0(\bigwedge^q \mathcal{H}_\zeta(-k)) = 0 \text{ si et seulement si } \gamma > \sum_{i=0}^{\min(q-1, n)} \lambda_{n-i}.$$

En particulier, on a

$$h^0(\bigwedge^q \mathcal{H}_\zeta(-k)) = 0 \text{ si } \gamma > \sum_{i=0}^n \lambda_i.$$

Pour démontrer (II), on a que

$$\max\{t \in \mathbb{Z} \mid \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(t) \subseteq (\bigwedge^p \mathcal{H}_\zeta) \otimes (\bigwedge^q \mathcal{H}_\zeta)\} = \sum_{i=0}^{\min(q-1, n)} \lambda_{n-i} + \sum_{i=0}^{\min(p-1, n)} \lambda_{n-i} \leq 2 \sum_{i=0}^n \lambda_i.$$

Donc pour $k \geq 2$, on obtient

$$h^0((\bigwedge^p \mathcal{H}_\zeta) \otimes \bigwedge^q \mathcal{H}_\zeta(-k\gamma)) = 0 \text{ si } \gamma > \sum_{i=0}^n \lambda_i.$$

□

4.2. Lemme. Soient p, q, k, b, a des entiers. Soit \mathcal{H}_ζ un fibré comme dans 3.1 pour $\zeta = 1$.
 I- Pour $k \geq \gamma$ et $1 \leq q \leq 2n+1$ et $0 \leq |a| \leq n$, on a

$h^0(\bigwedge^q \mathcal{H}_\zeta(-k+a)) = 0$ si et seulement si $\gamma - n > \sum_{i=0}^{\min(q-1, n)} \lambda_{n-i}$. En particulier, on a

$$h^0(\bigwedge^q \mathcal{H}_\zeta(-k+a)) = 0 \text{ si } \gamma - n > \sum_{i=0}^n \lambda_i.$$

II- Pour $k \geq 2, 0 \leq |b| \leq n$ et $1 \leq p, q \leq 2n+1$, on a

$$h^0((\bigwedge^p \mathcal{H}_\zeta) \otimes \bigwedge^q \mathcal{H}_\zeta(-k\gamma - b)) = 0 \text{ si } \gamma - n > \sum_{i=0}^n \lambda_i.$$

Démonstration. La démonstration de ce lemme est très similaire à celle du lemme 4.1. □

4.3. Proposition. Soit \mathcal{Q}_ζ le fibré de quotient pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} qui est défini par la suite exacte 2 pour $\zeta = 0$. Soient $1 \leq q \leq n, 0 < i < 2n+1$ et $k \geq 0$ des entiers. Alors on a

I- $h^0(\bigwedge^q \mathcal{Q}_\zeta^*(-m)) = 0$ si $\gamma > \sum_{v=0}^n \lambda_v, \forall m \in \mathbb{N}$.

II- Pour $0 \leq k \leq q$, on a

$$h^i(\bigwedge^q \mathcal{Q}_\zeta^*(-k\gamma)) = \begin{cases} 0 & : i \neq q \\ \epsilon_{k,q} & : i = q \neq k \\ 1 & : i = q = k \end{cases}$$

$$\text{où } \epsilon_{k,q} = h^1\{\ker[\mathcal{H}_\zeta(\gamma(q-1-k)) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma(q-k))]\}.$$

III- Pour $k > q$, on a

$$h^i(\bigwedge^q \mathcal{Q}_\zeta^*(-k\gamma)) = 0.$$

Démonstration. Pour démontrer (I), on considère $1 \leq q \leq n, 0 < i < 2n+1$ et $\forall m \in \mathbb{N}$ et $\zeta = 0$. De la résolution 5, on obtient la résolution suivante

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma(2n+2-q)-m) &\longrightarrow \mathcal{H}_\zeta(-\gamma(2n+1-q)-m) \longrightarrow \bigwedge^2 \mathcal{H}_\zeta(-\gamma(2n-q)-m) \\ &\xrightarrow{a_{2n-1-q}} \bigwedge^3 \mathcal{H}_\zeta(-\gamma(2n-1-q)-m) \xrightarrow{a_{2n-2-q}} \dots \\ \dots &\xrightarrow{a_3} \bigwedge^{q+3} \mathcal{H}_\zeta(-3\gamma-m) \xrightarrow{a_2} \bigwedge^{q+2} \mathcal{H}_\zeta(-2\gamma-m) \xrightarrow{a_1} \bigwedge^{q+1} \mathcal{H}_\zeta(-\gamma-m) \xrightarrow{a_0} \bigwedge^q \mathcal{Q}_\zeta^*(-m) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Soit $A_r = \ker(a_r)$ où $r = 0, 1, \dots, 2n-1-q$. Alors on obtient que $h^j(A_0) = 0$ pour $j \leq q$. Mais on a

$$h^0(\bigwedge^{q+1} \mathcal{H}_\zeta(-\gamma-m)) = 0 \text{ si } \gamma > \sum_{v=0}^n \lambda_v.$$

Donc on obtient, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$h^0(\bigwedge^q \mathcal{Q}_\zeta^*(-m)) = 0 \text{ si } \gamma > \sum_{v=0}^n \lambda_v.$$

De plus on a $h^i(\bigwedge^q \mathcal{Q}_\zeta^*(-m)) = 0$ pour $0 < i \leq q - 1$. De la résolution duale de résolution 4 on obtient la résolution suivante, pour tout $q > 0$,

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \bigwedge^q \mathcal{Q}_\zeta^*(-k\gamma) \longrightarrow \bigwedge^q \mathcal{H}_\zeta(-k\gamma) \longrightarrow \bigwedge^{q-1} \mathcal{H}_\zeta(\gamma(1-k)) \xrightarrow{b_{q-2}} \bigwedge^{q-2} \mathcal{H}_\zeta(\gamma(2-k)) \xrightarrow{b_{q-3}} \dots \\ \dots \xrightarrow{b_3} \bigwedge^3 \mathcal{H}_\zeta(\gamma(q-3-k)) \xrightarrow{b_2} \bigwedge^2 \mathcal{H}_\zeta(\gamma(q-2-k)) \xrightarrow{b_1} \mathcal{H}_\zeta(\gamma(q-1-k)) \xrightarrow{b_0} \mathcal{O}(\gamma(q-k)) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

On considère $B_r = \ker(b_r)$ pour $r = 0, 1, \dots, q - 2$. Alors on obtient

$$h^i(B_{q-2}) = \begin{cases} 0 & : q \leq i \leq 2n \\ h^1(B_0) = \epsilon_{k,q} & : i = q - 1 \end{cases}$$

Comme on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \bigwedge^q \mathcal{Q}_\zeta^*(-k\gamma) \longrightarrow \bigwedge^q \mathcal{H}_\zeta(-k\gamma) \longrightarrow B_{q-2} \longrightarrow 0,$$

alors on a, pour $0 \leq k \leq q$ et $0 < i < 2n + 1$,

$$h^i(\bigwedge^q \mathcal{Q}_\zeta^*(-k\gamma)) = \begin{cases} 0 & : q \neq i \\ 1 & : i = q = k \\ \epsilon_{k,q} & : \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $k > q$ et $0 < i < 2n + 1$, on a

$$h^i(\bigwedge^q \mathcal{Q}_\zeta^*(-k\gamma)) = 0.$$

□

4.4. Proposition. Soit \mathcal{Q}_ζ le fibré de quotient pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} qui est défini par la suite exacte 2 pour $\zeta = 1$. Soient $1 \leq q \leq n$, $0 < i < 2n + 1$ et $k \geq 0$ et $0 \leq a \leq n$ des entiers. Alors on a

I- $h^0(\bigwedge^q \mathcal{Q}_\zeta^*(-k\gamma - a)) = 0$ si $\gamma - n > \sum_{v=0}^n \lambda_v$.

II- Pour $0 \leq k, a \leq q$, on a

$$h^i(\bigwedge^q \mathcal{Q}_\zeta^*(-k\gamma - a)) = \begin{cases} 0 & : q \neq i \\ 1 & : i = q = k = a \\ \epsilon_{k,q,a} & : \text{sinon} \end{cases}$$

où $\epsilon_{k,q,a} = h^1\{Ker[\mathcal{H}_\zeta(\gamma(q-1-k) + q-1-a) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma(q-k) + q-a)]\}$.

III- Pour $k, a > q$, on a

$$h^i(\bigwedge^q \mathcal{Q}_\zeta^*(-k\gamma - a)) = 0.$$

Démonstration. La démonstration de cette proposition est très similaire à celle de la proposition 4.3.

□

4.5. Proposition. Soit \mathcal{N}_ζ le fibré de 0-corrélation pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} qui est défini par la suite exacte 6 pour $\zeta = 0$. Pour $1 \leq 2j+1 \leq n$ et $m \geq 0$ des entiers,

I- Si on a $\gamma > \sum_{i=0}^n \lambda_i$, alors on obtient que $h^0(\bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}_\zeta(-m\gamma)) = 0$.

II- $h^1(\bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}_\zeta(-\gamma)) = 1$.

Démonstration. Pour démontrer (I), on fixe $1 \leq 2j+1 \leq n$, $\forall m \in \mathbb{N}$ et $\zeta = 0$. On obtient, de la résolution 7, la résolution suivante

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma(2j+1+m)) \longrightarrow \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(2j+m)) \longrightarrow \bigwedge^2 \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(2j-1+m)) \\ \xrightarrow{a_{2j-1}} \bigwedge^3 \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(2j-2+m)) \xrightarrow{a_{2j-2}} \dots \\ \dots \xrightarrow{a_2} \bigwedge^{2j} \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(1+m)) \xrightarrow{a_1} \bigwedge^{2j+1} \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma m) \xrightarrow{a_0} \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}_\zeta(-\gamma m) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

On considère $A_i = \ker(a_i)$ pour $i = 0, 1, \dots, 2j-1$. Les termes dans cette résolution sont de la forme $\bigwedge^q \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(k+m))$, où $0 \leq k \leq 2j$, $1 \leq q \leq 2j+1$ tels que $k+q = 2j+1$ et $k \neq q$. D'après la proposition 4.3, on obtient que $h^k(\bigwedge^{2j+1-k} \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(k+m))) = 0$. Comme

$$h^{2j+1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma(2j+1+m))) = 0$$

alors on a $h^{i+1}(A_i) = 0$, $i = 0, 1, \dots, 2j-1$. De la suite exacte

$$0 \longrightarrow A_0 \longrightarrow \bigwedge^{2j+1} \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma m) \xrightarrow{a_0} \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}_\zeta(-\gamma m) \longrightarrow 0$$

et comme $h^0(\bigwedge^{2j+1} \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma m)) = 0$ si $\gamma > \sum_{i=0}^n \lambda_i$, alors on obtient que

$$h^0\left(\bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}_\zeta(-\gamma m)\right) = 0 \text{ si } \gamma > \sum_{i=0}^n \lambda_i.$$

Pour démontrer (II), on fixe $m = 1$ dans la résolution précédente. On obtient la résolution suivante

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma(2j+2)) \longrightarrow \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(2j+1)) \longrightarrow \bigwedge^2 \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(2j)) \\ \xrightarrow{d_{2j-1}} \bigwedge^3 \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(2j-1)) \xrightarrow{d_{2j-2}} \dots \\ \dots \xrightarrow{d_{j+2}} \bigwedge^j \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(j+2)) \xrightarrow{d_{j+1}} \bigwedge^{j+1} \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(j+1)) \xrightarrow{d_j} \bigwedge^{j+2} \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(j)) \xrightarrow{d_{j-1}} \dots \\ \dots \xrightarrow{d_3} \bigwedge^{2j-1} \mathcal{Q}_\zeta^*(-3\gamma) \xrightarrow{d_2} \bigwedge^{2j} \mathcal{Q}_\zeta^*(-2\gamma) \xrightarrow{d_1} \bigwedge^{2j+1} \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma) \xrightarrow{d_0} \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}_\zeta(-\gamma) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

On considère $D_\alpha = \ker(d_\alpha)$ pour $\alpha = 0, 1, \dots, 2j-1$. Les termes dans cette résolution sont de la forme $\bigwedge^q \mathcal{Q}_\zeta^*(-k\gamma)$ où $1 \leq k, q \leq 2j+1$ tels que $k+q = 2j+2$.

On a deux cas:

Premier cas, si $k \geq q$. Dans ce cas on obtient, d'après la proposition 4.3, que

$$h^i(\bigwedge^q \mathcal{Q}_\zeta^*(-k\gamma)) = 0 \text{ pour } i \neq 0, \quad 2n+1.$$

Donc ça nous donne que $h^i(D_\alpha) = 0$ pour $\alpha \geq j$, $i \leq 2n-j$, sauf pour $i = \alpha$. On a

$$h^{j+1}(\bigwedge^{j+1} \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(j+1))) = 1, \quad h^i(D_j) = 0, \quad i = j+1, j+2.$$

De la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow D_j \longrightarrow \bigwedge^{j+1} \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(j+1)) \longrightarrow D_{j-1} \longrightarrow 0,$$

on obtient que $h^{j+1}(D_{j-1}) = 1$. Donc on obtient $h^{\alpha+2}(D_\alpha) = 1$ pour $\alpha = 0, 1, \dots, j-1$.

Deuxième cas, si $k < q$. D'après la proposition 4.3, on obtient $h^i(\bigwedge^q \mathcal{Q}_\zeta^*(-k\gamma)) = 0$ pour $i = k, k-1, 1 \leq k \leq j+1$. Alors on obtient que $h^{\alpha+2}(D_\alpha) = 1$ pour $\alpha = 0, 1, \dots, j-1$.

Dans les deux cas: d'après la proposition 4.3, on obtient que

$$h^i(\bigwedge^{2j+1} \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma)) = 0 \text{ pour } i = 1, 2.$$

Donc d'après la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow D_0 \longrightarrow \bigwedge^{2j+1} \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma) \xrightarrow{a_0} \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}_\zeta(-\gamma) \longrightarrow 0,$$

on obtient que $h^1(\bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}_\zeta(-\gamma)) = 1$.

□

4.6. Proposition. Soit \mathcal{N}_ζ le fibré de 0-corrélation pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} qui est défini par la suite exacte 6 pour $\zeta = 1$. Pour $1 \leq 2j+1 \leq n$, $m \geq 0$ et $0 \leq a \leq n$ des entiers,

I- Si on a $\gamma - n > \sum_{i=0}^n \lambda_i$, alors on obtient que $h^0(\bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}_\zeta^*(-m\gamma - a)) = 0$.

II- $h^1(\bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}_\zeta^*(-\gamma - (j+1))) = 1$.

Démonstration. Pour démontrer (I), on fixe $1 \leq 2j+1 \leq n$ et $\zeta = 1$. On obtient, de la résolution 7, la résolution suivante

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma(2j+1+m) - \alpha) &\longrightarrow \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(2j+m) - \alpha) \longrightarrow \bigwedge^2 \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(2j-1+m) - \alpha) \\ &\xrightarrow{a_{2j-1}} \bigwedge^3 \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(2j-2+m) - \alpha) \xrightarrow{a_{2j-2}} \dots \\ &\xrightarrow{a_{j+1}} \bigwedge^{j+1} \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(j+m) - \alpha) \xrightarrow{a_j} \bigwedge^{j+2} \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(j-1+m) - \alpha) \xrightarrow{a_{j-1}} \dots \\ &\dots \xrightarrow{a_2} \bigwedge^{2j} \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(1+m) - \alpha) \xrightarrow{a_1} \bigwedge^{2j+1} \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma m - \alpha) \xrightarrow{a_0} \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}_\zeta^*(-\gamma m - \alpha) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

On considère $A_i = \text{Ker}(a_i)$ pour $i = 0, 1, \dots, 2j - 1$. Les termes dans cette résolution sont de la forme $\bigwedge^q \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(k+m) - \alpha)$, où $0 \leq k \leq 2j$, $1 \leq q \leq 2j + 1$ tels que $k + q = 2j + 1$ et $k \neq q$. D'après la proposition 4.4, on obtient que $h^k(\bigwedge^{2j+1-k} \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(k+m) - \alpha)) = 0$. Comme

$$h^{2j+1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma(2j+1+m) - \alpha)) = 0$$

alors on a $h^{i+1}(A_i) = 0$, $i = 0, 1, \dots, 2j - 1$. De la suite exacte

$$0 \longrightarrow A_0 \longrightarrow \bigwedge^{2j+1} \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma m - \alpha) \xrightarrow{a_0} \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}_\zeta^*(-\gamma m - \alpha) \longrightarrow 0$$

et comme $h^0(\bigwedge^{2j+1} \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma m)) = 0$, si $\gamma - n > \sum_{i=0}^n \lambda_i$, alors on obtient que

$$h^0(\bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}_\zeta^*(-\gamma m - \alpha)) = 0, \text{ si } \gamma - n > \sum_{i=0}^n \lambda_i.$$

Pour démontrer (II), on fixe $m = 1, \alpha = j + 1$ dans la résolution précédente; on obtient la résolution suivante

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma(2j+2) - (j+1)) &\longrightarrow \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(2j+1) - (j+1)) \longrightarrow \bigwedge^2 \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(2j) - (j+1)) \\ &\xrightarrow{d_{2j-1}} \bigwedge^3 \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(2j-1) - (j+1)) \xrightarrow{d_{2j-2}} \dots \\ \dots \xrightarrow{d_{j+2}} \bigwedge^j \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(j+2) - (j+1)) &\xrightarrow{d_{j+1}} \bigwedge^{j+1} \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(j+1) - (j+1)) \xrightarrow{d_j} \bigwedge^{j+2} \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(j) - (j+1)) \xrightarrow{d_{j-1}} \dots \\ \dots \xrightarrow{d_2} \bigwedge^{2j} \mathcal{Q}_\zeta^*(-2\gamma - (j+1)) &\xrightarrow{d_1} \bigwedge^{2j+1} \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma - (j+1)) \xrightarrow{d_0} \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}_\zeta^*(-\gamma - (j+1)) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

On considère $D_i = \text{Ker}(d_i)$ pour $i = 0, 1, \dots, 2j - 1$. Les termes dans cette résolution sont de la forme $\bigwedge^q \mathcal{Q}_\zeta^*(-k\gamma - (j+1))$, où $1 \leq k, q \leq 2j + 1$ tels que $k + q = 2j + 2$.

On a deux cas:

Premier cas, si $k \geq q$. Dans ce cas, on obtient, d'après la proposition 4.4, que

$$h^i(\bigwedge^q \mathcal{Q}_\zeta^*(-k\gamma) - (j+1)) = 0 \text{ pour } i \neq 0, 2n+1.$$

Donc ça nous donne que $h^i(D_\beta) = 0$ pour $\beta \geq j$, $i \leq 2n - j$, sauf $i = \beta$. On a

$$h^{j+1}(\bigwedge^{j+1} \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(j+1) - (j+1))) = 1, \quad h^i(D_j) = 0, \quad i = j+1, j+2$$

et on a la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow D_j \longrightarrow \bigwedge^{j+1} \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(j+1) - (j+1)) \longrightarrow D_{j-1} \longrightarrow 0$$

On obtient que $h^{j+1}(D_{j-1}) = 1$. Donc on obtient $h^{\beta+2}(D_\beta) = 1$ pour $\beta = 0, 1, \dots, j-1$.

Deuxième cas, $k < q$. D'après la proposition 4.4, on obtient

$$h^i(\bigwedge^q \mathcal{Q}_\zeta^*(-k\gamma) - (j+1)) = 0 \text{ pour } i = k, k-1, 1 \leq k \leq j+1.$$

Alors on obtient que $h^{\beta+2}(D_\beta) = 1$ pour $\beta = 0, 1, \dots, j-1$. Dans les deux cas: d'après la proposition 4.4, on obtient que

$$h^i(\bigwedge^{2j+1} \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma - (j+1))) = 0 \text{ pour } i = 1, 2.$$

Donc d'après la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow D_0 \longrightarrow \bigwedge^{2j+1} \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma - (j+1)) \xrightarrow{a_0} \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}_\zeta^*(-\gamma - (j+1)) \longrightarrow 0,$$

on obtient que $h^1(\bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}_\zeta^*(-\gamma - (j+1))) = 1$.

□

4.7. Proposition. Soit \mathcal{Q}_ζ le fibré de quotient pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} qui est défini par la suite exacte 2 pour $\zeta = 0$. Soient $\alpha \in \mathbb{Z}$, $1 \leq k \leq n+1$ un entier. Si on a $\gamma > \sum_{i=0}^n \lambda_i$, alors on obtient

- Pour $\alpha = 1$,

$$h^i(\mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}_\zeta(-\alpha\gamma)) = 0, \text{ où } 2 \leq i \leq 2n, \text{ ou bien } i = 0.$$

- Pour $\alpha < 1$,

$$h^i(\mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}_\zeta(-\alpha\gamma)) = 0, \text{ où } 2 \leq i \leq 2n.$$

- Pour $\alpha > 1$,

$$h^i(\mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}_\zeta(-\alpha\gamma)) = 0, \text{ où } 0 \leq i \leq 2n.$$

Démonstration. On fixe $\gamma > \sum_{i=0}^n \lambda_i$. Soient $1 \leq k \leq n+1$ un entier et $\alpha \in \mathbb{Z}$ et $\zeta = 0$. On veut calculer les groupes cohomologiques du fibré

$$\mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}_\zeta(-\alpha\gamma).$$

De la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}_\zeta(-\alpha\gamma) \longrightarrow \mathcal{H}_\zeta \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}_\zeta(-\alpha\gamma) \longrightarrow \bigwedge^k \mathcal{H}_\zeta(\gamma(-\alpha+1)) \longrightarrow 0$$

et d'après le lemme 4.1:

si $\alpha \leq 1$, on a

$$h^i(\mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}_\zeta(-\alpha\gamma)) = 0, \text{ } 2 \leq i \leq 2n,$$

si $\alpha > 1$, on a

$$h^i(\mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}_\zeta(-\alpha\gamma)) = 0, \text{ } 1 \leq i \leq 2n.$$

Pour calculer $h^0(\mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}_\zeta(-\alpha\gamma))$, on va utiliser la résolution 5 avec $q = 1$. Donc on obtient la résolution suivante

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \bigwedge^k \mathcal{H}_\zeta(-\gamma(\alpha + 2n + 1)) \longrightarrow \mathcal{H}_\zeta \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}_\zeta(-\gamma(\alpha + 2n)) \longrightarrow \\ \left(\bigwedge^2 \mathcal{H}_\zeta \right) \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}_\zeta(-\gamma(\alpha + 2n - 1)) \xrightarrow{d_{2n-2}} \left(\bigwedge^3 \mathcal{H}_\zeta \right) \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}_\zeta(-\gamma(\alpha + 2n - 2)) \xrightarrow{d_{2n-3}} \dots \\ \dots \xrightarrow{d_2} \left(\bigwedge^3 \mathcal{H}_\zeta \right) \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}_\zeta(-\gamma(\alpha + 2)) \xrightarrow{d_1} \left(\bigwedge^2 \mathcal{H}_\zeta \right) \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}_\zeta(-\gamma(\alpha + 1)) \xrightarrow{d_0} \mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}_\zeta(-\alpha\gamma) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

On considère $D_j = \ker(d_j)$ pour $j = 0, 1, \dots, 2n - 2$. D'après le lemme 4.1, on obtient que $h^1(D_0) = 0$ pour $\alpha \in \mathbb{Z}$. D'après le lemme 4.1 et de la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow D_0 \longrightarrow \left(\bigwedge^2 \mathcal{H}_\zeta \right) \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}_\zeta(-\gamma(\alpha + 1)) \xrightarrow{d_0} \mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}_\zeta(-\alpha\gamma) \longrightarrow 0$$

on obtient que, si $\alpha \geq 1$,

$$h^0(\mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}_\zeta(-\alpha\gamma)) = 0.$$

□

4.8. Proposition. Soit \mathcal{Q}_ζ le fibré de quotient pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} qui est défini par la suite exacte 2 pour $\zeta = 1$. Soient $\alpha \in \mathbb{Z}$, $2 \leq k \leq 2n + 1$ et $|b| < n$ des entiers. Si on a $\gamma - n > \sum_{i=0}^n \lambda_i$, alors on obtient

- Pour $\alpha = 1$,

$$h^i(\mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}_\zeta(-\alpha\gamma - b)) = 0, \text{ où } 2 \leq i \leq 2n, \text{ ou bien } i = 0$$

- Pour $\alpha < 1$,

$$h^i(\mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}_\zeta(-\alpha\gamma - b)) = 0, \text{ où } 2 \leq i \leq 2n.$$

- Pour $\alpha > 1$,

$$h^i(\mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}_\zeta(-\alpha\gamma - b)) = 0, \text{ où } 0 \leq i \leq 2n.$$

Démonstration. La démonstration de cette proposition est très similaire à celle de la proposition 4.7. □

4.9. Proposition. Soit \mathcal{Q}_ζ le fibré de quotient pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} qui est défini par la suite exacte 2 pour $\zeta = 0$. Soient $\alpha \geq 0$ et $1 \leq q \leq n$ des entiers. Si on a $\gamma > \sum_{i=0}^n \lambda_i$, alors on obtient

- Pour $\alpha = 0$,

$$h^i(\mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^q \mathcal{Q}_\zeta^*(-\alpha\gamma)) = 0, \text{ où } 2 \leq i \leq q-1, \text{ ou bien } i = 0 \text{ ou bien } q+1 \leq i \leq 2n.$$

- Pour $\alpha > 0$,

$$h^i(\mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^q \mathcal{Q}_\zeta^*(-\alpha\gamma)) = 0, \text{ où } 0 \leq i \leq q-1 \text{ ou bien } q+1 \leq i \leq 2n.$$

Démonstration. On fixe $\gamma > \sum_{i=0}^n \lambda_i$. Soient $\alpha \geq 0$ et $1 \leq q \leq n$ des entiers et $\zeta = 0$. On veut calculer les groupes cohomologiques du fibré

$$\mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^q \mathcal{Q}_\zeta^*(-\alpha\gamma).$$

De la résolution 5, on obtient la résolution suivante

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(\alpha+2n+2-q)) \longrightarrow \mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \mathcal{H}_\zeta(-\gamma(\alpha+2n+1-q)) \longrightarrow \mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^2 \mathcal{H}_\zeta(-\gamma(\alpha+2n-q)) \\ \xrightarrow{b_{2n-1-q}} \mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^3 \mathcal{H}_\zeta(-\gamma(\alpha+2n-1-q)) \xrightarrow{b_{2n-2-q}} \dots \\ \dots \xrightarrow{b_2} \mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^{q+2} \mathcal{H}_\zeta(-\gamma(\alpha+2)) \xrightarrow{b_1} \mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^{q+1} \mathcal{H}_\zeta(-\gamma(\alpha+1)) \xrightarrow{b_0} \mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^q \mathcal{Q}_\zeta^*(-\alpha\gamma) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

On considère $B_m = \ker(b_m)$ pour $m = 0, 1, \dots, 2n-1-q$. D'après la proposition 4.7, on a alors

$$h^i(B_0) = 0, \text{ où } 0 \leq i \leq q.$$

De la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow B_0 \longrightarrow \mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^{q+1} \mathcal{H}_\zeta(-\gamma(\alpha+1)) \xrightarrow{b_0} \mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^q \mathcal{Q}_\zeta^*(-\alpha\gamma) \longrightarrow 0$$

et d'après la proposition 4.7 on obtient, si $\alpha = 0$,

$$h^i(\mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^q \mathcal{Q}_\zeta^*(-\alpha\gamma)) = 0, \text{ où } 2 \leq i \leq q-1, \text{ ou bien } i = 0.$$

On obtient aussi, si $\alpha > 0$,

$$h^i(\mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^q \mathcal{Q}_\zeta^*(-\alpha\gamma)) = 0, \text{ où } 0 \leq i \leq q-1.$$

On a la résolution suivante

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^q \mathcal{Q}_\zeta^*(-\alpha\gamma) \longrightarrow \mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^q \mathcal{H}_\zeta(-\alpha\gamma) \longrightarrow \mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^{q-1} \mathcal{H}_\zeta(\gamma(-\alpha+1)) \xrightarrow{a_{q-2}} \\ \mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^{q-2} \mathcal{H}_\zeta(\gamma(-\alpha+2)) \xrightarrow{a_{q-3}} \dots \end{aligned}$$

$$\dots \xrightarrow{a_2} \mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^2 \mathcal{H}_\zeta(\gamma(-\alpha + q - 2)) \xrightarrow{a_1} \mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \mathcal{H}_\zeta(\gamma(-\alpha + q - 1)) \xrightarrow{a_0} \mathcal{Q}_\zeta^*(\gamma(-\alpha + q)) \longrightarrow 0.$$

On considère $A_r = \ker(a_r)$ pour $r = 0, 1, \dots, q - 2$. D'après la proposition 4.7, on a alors

$$h^i(A_{q-2}) = 0, \text{ où } q \leq i \leq 2n.$$

De la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^q \mathcal{Q}_\zeta^*(-\alpha\gamma) \longrightarrow \mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^q \mathcal{H}_\zeta(-\alpha\gamma) \longrightarrow A_{q-2} \longrightarrow 0$$

et d'après la proposition 4.7 on obtient, si $\alpha \geq 0$,

$$h^i(\mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^q \mathcal{Q}_\zeta^*(-\alpha\gamma)) = 0, \text{ où } q + 1 \leq i \leq 2n.$$

□

4.10. Proposition. Soit \mathcal{Q}_ζ le fibré de quotient pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} qui est défini par la suite exacte 2 pour $\zeta = 1$. Soient $\alpha \geq 0$ et $1 \leq q \leq n$ et $2 \leq d \leq n$ des entiers. Si on a $\gamma - n > \sum_{i=0}^n \lambda_i$, alors on obtient

- Pour $\alpha = 0$,

$$h^i(\mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^q \mathcal{Q}_\zeta^*(-\alpha\gamma - d)) = 0, \text{ où } 2 \leq i \leq q - 1, \text{ ou } i = 0 \text{ ou } q + 1 \leq i \leq 2n$$

- Pour $\alpha > 0$,

$$h^i(\mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^q \mathcal{Q}_\zeta^*(-\alpha\gamma - d)) = 0, \text{ où } 0 \leq i \leq q - 1 \text{ ou } q + 1 \leq i \leq 2n.$$

Démonstration. La démonstration de cette proposition est très similaire à celle de la proposition 4.9. □

4.11. Proposition. Soit \mathcal{N}_ζ le fibré de 0-corrélation pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} qui est défini par la suite exacte 6 pour $\zeta = 0$. Soit $1 \leq 2j + 1 \leq n$. Si on a $\gamma > \sum_{i=0}^n \lambda_i$, alors on obtient que

$$h^0(\mathcal{N}_\zeta \otimes \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}_\zeta) = 1.$$

Démonstration. On fixe $1 \leq 2j + 1 \leq n$ et $\gamma > \sum_{i=0}^n \lambda_i$ et $\zeta = 0$. D'après le lemme 2.3 et la proposition 3.2, on obtient que

$$h^0(\mathcal{N}_\zeta \otimes \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}_\zeta) \geq 1.$$

De la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}_\zeta(-\gamma) \longrightarrow \mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}_\zeta \longrightarrow \mathcal{N}_\zeta \otimes \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}_\zeta \longrightarrow 0$$

et suivant la proposition 4.5, il suffit de démontrer que

$$h^0(\mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}_\zeta) = 0$$

pour que l'on ait

$$h^0(\mathcal{N}_\zeta \otimes \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}_\zeta) = 1.$$

De la résolution 7, on obtient la résolution suivante

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(2j+1)) \longrightarrow \mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(2j)) \longrightarrow \mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^2 \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(2j-1)) \xrightarrow{\mu_{2j-1}} \\ \mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^3 \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(2j-2)) \xrightarrow{\mu_{2j-2}} \dots \\ \dots \xrightarrow{\mu_{j+2}} \mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^j \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(j+1)) \xrightarrow{\mu_{j+1}} \mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^{j+1} \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(j)) \xrightarrow{\mu_j} \mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^{j+2} \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(j-1)) \xrightarrow{\mu_{j-1}} \dots \\ \dots \xrightarrow{\mu_3} \mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^{2j-1} \mathcal{Q}_\zeta^*(-2\gamma) \xrightarrow{\mu_2} \mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^{2j} \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma) \xrightarrow{\mu_1} \mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^{2j+1} \mathcal{Q}_\zeta^* \xrightarrow{\mu_0} \mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}_\zeta \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

On considère $\Sigma_m = \ker(\mu_m)$ pour $m = 0, 1, \dots, 2j-1$. Les termes dans cette résolution sont de la forme

$$\mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^q \mathcal{Q}_\zeta^*(-\alpha\gamma),$$

où $0 \leq \alpha \leq 2j$, $1 \leq q \leq 2j+1 \leq n$ tels que $q + \alpha = 2j+1$ et $q \neq \alpha$. D'après la proposition 4.9, on a

$$h^\alpha(\mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^{2j+1-\alpha} \mathcal{Q}_\zeta^*(-\alpha\gamma)) = 0 \text{ pour tout } \alpha, \text{ si } \gamma > \sum_{i=0}^n \lambda_i.$$

Comme $h^i(\mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(2j+1))) = 0$ pour tout $0 \leq i \leq 2n$, alors on obtient que $h^1(\Sigma_0) = 0$. En utilisant la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \Sigma_0 \longrightarrow \mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^{2j+1} \mathcal{Q}_\zeta^* \xrightarrow{\mu_0} \mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}_\zeta \longrightarrow 0,$$

on obtient que

$$h^0(\mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}_\zeta) = 0,$$

et

$$h^0(\mathcal{N}_\zeta \otimes \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}_\zeta) = 1 \text{ si } \gamma > \sum_{i=0}^n \lambda_i.$$

□

4.12. Proposition. Soit \mathcal{N}_ζ le fibré de 0-corrélation pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} qui est défini par la suite exacte 6 pour $\zeta = 1$. Soit $1 \leq 2j+1 \leq n$. Si on a $\gamma - n > \sum_{i=0}^n \lambda_i$, alors on obtient que

$$h^0(\mathcal{N}_\zeta^*(-(j+1))) \otimes \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}_\zeta^* = 1.$$

Démonstration. On fixe $1 \leq 2j+1 \leq n$ et $\gamma - n > \sum_{i=0}^n \lambda_i$ et $\zeta = 1$. D'après le lemme 2.3 et la proposition 3.2, on obtient que

$$h^0(\mathcal{N}_\zeta^*(-(j+1))) \otimes \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}_\zeta^* \geq 1.$$

De la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}_\zeta^*(-\gamma - (j+1)) \longrightarrow \mathcal{Q}_\zeta^*(-(j+1)) \otimes \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}_\zeta^* \longrightarrow h^0(\mathcal{N}_\zeta^*(-(j+1))) \otimes \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}_\zeta^* \longrightarrow 0$$

et suivant la proposition 4.6, il suffit de démontrer que

$$h^0(\mathcal{Q}_\zeta^*(-(j+1))) \otimes \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}_\zeta^* = 0$$

pour que l'on ait

$$h^0(\mathcal{N}_\zeta^*(-(j+1))) \otimes \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}_\zeta^* = 1.$$

De la résolution 7, on obtient la résolution suivante

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(2j+1) - (j+1)) \longrightarrow \mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(2j) - (j+1)) \longrightarrow \\ &\mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^2 \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(2j-1) - (j+1)) \xrightarrow{\mu_{2j-1}} \mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^3 \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(2j-2) - (j+1)) \xrightarrow{\mu_{2j-2}} \dots \\ &\dots \xrightarrow{\mu_{j+2}} \mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^j \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(j+1) - (j+1)) \xrightarrow{\mu_{j+1}} \mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^{j+1} \mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(j) - (j+1)) \xrightarrow{\mu_j} \dots \\ &\dots \xrightarrow{\mu_1} \mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^{2j+1} \mathcal{Q}_\zeta^*(-(j+1)) \xrightarrow{\mu_0} \mathcal{Q}_\zeta^*(-(j+1)) \otimes \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}_\zeta^* \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

On considère $\Sigma_m = \text{Ker}(\mu_m)$ pour $m = 0, 1, \dots, 2j-1$. Les termes dans cette résolution sont de la forme

$$\mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^q \mathcal{Q}_\zeta^*(-\alpha\gamma - (j+1)),$$

où $0 \leq \alpha \leq 2j$, $1 \leq q \leq 2j+1 \leq n$ tels que $q + \alpha = 2j+1$ $q \neq \alpha$. D'après la proposition 4.10; on a

$$h^\alpha(\mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^{2j+1-\alpha} \mathcal{Q}_\zeta^*(-\alpha\gamma - (j+1))) = 0, \text{ pour tout } \alpha$$

Comme $h^i(\mathcal{Q}_\zeta^*(-\gamma(2j+1) - (j+1))) = 0$, pour tout $0 \leq i \leq 2n$, alors on obtient que $h^1(\Sigma_0) = 0$. En utilisant de la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \Sigma_0 \longrightarrow \mathcal{Q}_\zeta^* \otimes \bigwedge^{2j+1} \mathcal{Q}_\zeta^*(-(j+1)) \xrightarrow{\mu_0} \mathcal{Q}_\zeta^*(-(j+1)) \otimes \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}_\zeta^* \longrightarrow 0$$

on obtient que

$$h^0(\mathcal{Q}_\zeta^*(-(j+1)) \otimes \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}_\zeta^*) = 0.$$

Donc, on a

$$h^0(\mathcal{N}_\zeta^*(-(j+1)) \otimes \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}_\zeta^*) = 1 \text{ si } \gamma - n > \sum_{i=0}^n \lambda_i.$$

□

4.13. Théorème. Soient $\mathcal{Q}_{\zeta;\gamma;\lambda_n,\lambda_{n-1},\dots,\lambda_0}$ le fibré de quotient pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} des poids $\gamma; \lambda_n, \lambda_{n-1}, \dots, \lambda_0$ et $\mathcal{N}_{\zeta;\gamma;\lambda_n,\lambda_{n-1},\dots,\lambda_0}$ le fibré de 0-corrélation pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} des poids $\gamma; \lambda_n, \lambda_{n-1}, \dots, \lambda_0$ qui sont définis par les suites exactes suivantes

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma) \xrightarrow{B} \mathcal{H}_\zeta \longrightarrow \mathcal{Q}_{\zeta;\gamma;\lambda_n,\lambda_{n-1},\dots,\lambda_0} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_{\zeta;\gamma;\lambda_n,\lambda_{n-1},\dots,\lambda_0} \longrightarrow \mathcal{Q}_{\zeta;\gamma;\lambda_n,\lambda_{n-1},\dots,\lambda_0} \xrightarrow{A} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma) \longrightarrow 0.$$

Pour $1 \leq 2j+1 \leq n$, les conditions suivantes sont équivalentes

I- $\gamma - \zeta n > \sum_{i=0}^n \lambda_i$.

II- $\mathcal{N}_{\zeta;\gamma;\lambda_n,\lambda_{n-1},\dots,\lambda_0}$ est stable.

III- $\mathcal{N}_{\zeta;\gamma;\lambda_n,\lambda_{n-1},\dots,\lambda_0}$ est simple.

Démonstration. Pour $\zeta = 0$.

(I) \implies (II). On fixe $\gamma > \sum_{i=0}^n \lambda_i$. D'après la proposition 3.2, le fibré $\mathcal{N}_{\zeta;\gamma;\lambda_n,\lambda_{n-1},\dots,\lambda_0}$ est un fibré symplectique. D'après les propositions 4.5, 4.11 et le théorème 2.5, on obtient que $\mathcal{N}_{\zeta;\gamma;\lambda_n,\lambda_{n-1},\dots,\lambda_0}$ est stable.

(II) \implies (III). Evident.

(III) \implies (I). On suppose que $\gamma \leq \sum_{i=0}^n \lambda_i$. On choisit $\gamma_0 \leq \sum_{i=0}^1 \lambda_{n-i}$ un entier tel que $\gamma_0 > \lambda_n \geq \lambda_{n-1} \geq \dots \geq \lambda_0 \geq 0$. De la résolution 5, on obtient la résolution suivante

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-2n\gamma_0) \longrightarrow \mathcal{H}_\zeta(-\gamma_0(2n-1)) \longrightarrow \bigwedge^2 \mathcal{H}_\zeta(-\gamma_0(2n-2)) \xrightarrow{a_{2n-3}} \\ \bigwedge^3 \mathcal{H}_\zeta(-\gamma_0(2n-3)) \xrightarrow{a_{2n-4}} \dots \\ \dots \xrightarrow{a_3} \bigwedge^5 \mathcal{H}_\zeta(-3\gamma_0) \xrightarrow{a_2} \bigwedge^4 \mathcal{H}_\zeta(-2\gamma_0) \xrightarrow{a_1} \bigwedge^3 \mathcal{H}_\zeta(-\gamma_0) \xrightarrow{a_0} \bigwedge^2 \mathcal{Q}_{\zeta;\gamma_0;\lambda_n,\lambda_{n-1},\dots,\lambda_0}^* \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

On considère $A_j = \ker(a_j)$ pour $j = 0, 1, \dots, 2n-3$. Du lemme 4.1, on obtient alors

$$h^k(A_0) = 0, \quad 0 \leq k \leq 2.$$

De la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow A_0 \longrightarrow \bigwedge^3 \mathcal{H}_\zeta(-\gamma_0) \xrightarrow{a_0} \bigwedge^2 \mathcal{Q}_{\zeta;\gamma_0;\lambda_n,\lambda_{n-1},\dots,\lambda_0}^* \longrightarrow 0$$

on obtient la suite exacte des cohomologies

$$0 \longrightarrow H^0(A_0) \longrightarrow H^0\left(\bigwedge^3 \mathcal{H}_\zeta(-\gamma_0)\right) \xrightarrow{a_0} H^0\left(\bigwedge^2 \mathcal{Q}_{\zeta;\gamma_0;\lambda_n,\lambda_{n-1},\dots,\lambda_0}^*\right) \longrightarrow 0.$$

D'après le lemme 4.1 on obtient $H^0(\bigwedge^3 \mathcal{H}_\zeta(-\gamma_0)) \neq 0$, car $\gamma_0 \leq \sum_{i=0}^1 \lambda_{n-i}$, ce qui nous donne

$$0 \neq H^0\left(\bigwedge^2 \mathcal{Q}_{\zeta;\gamma_0;\lambda_n,\lambda_{n-1},\dots,\lambda_0}^*\right) \neq \mathbb{C}.$$

De la résolution 7, on obtient la résolution suivante

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-2\gamma_0) \longrightarrow \mathcal{Q}_{\zeta;\gamma_0;\lambda_n,\lambda_{n-1},\dots,\lambda_0}^*(-\gamma_0) \longrightarrow \bigwedge^2 \mathcal{Q}_{\zeta;\gamma_0;\lambda_n,\lambda_{n-1},\dots,\lambda_0}^* \xrightarrow{b_0} \\ \bigwedge^2 \mathcal{N}_{\zeta;\gamma_0;\lambda_n,\lambda_{n-1},\dots,\lambda_0} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

qui est équivalente aux deux suites exactes suivantes

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow B_0 \longrightarrow \bigwedge^2 \mathcal{Q}_{\zeta;\gamma_0;\lambda_n,\lambda_{n-1},\dots,\lambda_0}^* \xrightarrow{b_0} \bigwedge^2 \mathcal{N}_{\zeta;\gamma_0;\lambda_n,\lambda_{n-1},\dots,\lambda_0} \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-2\gamma_0) \longrightarrow \mathcal{Q}_{\zeta;\gamma_0;\lambda_n,\lambda_{n-1},\dots,\lambda_0}^*(-\gamma_0) \longrightarrow B_0 \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

On obtient $h^0(B_0) = 0$, $h^1(B_0) = 1$. De la suite exacte de cohomologie des fibrés

$$0 \longrightarrow H^0\left(\bigwedge^2 \mathcal{Q}_{\zeta;\gamma_0;\lambda_n,\lambda_{n-1},\dots,\lambda_0}^*\right) \longrightarrow H^0\left(\bigwedge^2 \mathcal{N}_{\zeta;\gamma_0;\lambda_n,\lambda_{n-1},\dots,\lambda_0}\right) \longrightarrow H^1(B_0) \longrightarrow 0,$$

on obtient que $0 \neq H^0(\bigwedge^2 \mathcal{N}_{\zeta;\gamma_0;\lambda_n,\lambda_{n-1},\dots,\lambda_0}) \neq \mathbb{C}$. Mais, on a

$$H^0\left(\bigwedge^2 \mathcal{N}_{\zeta;\gamma_0;\lambda_n,\lambda_{n-1},\dots,\lambda_0}\right) \subseteq H^0(\mathcal{N}_{\zeta;\gamma_0;\lambda_n,\lambda_{n-1},\dots,\lambda_0} \otimes \mathcal{N}_{\zeta;\gamma_0;\lambda_n,\lambda_{n-1},\dots,\lambda_0}).$$

Autrement dit, $\mathcal{N}_{\zeta;\gamma_0;\lambda_n,\lambda_{n-1},\dots,\lambda_0}$ n'est pas simple. Ce qui est une contradiction.

Pour $\zeta = 1$, la démonstration dans ce cas est très similaire à celle pour $\zeta = 0$. □

5. Déformation miniversale de fibré de 0-corrélation pondéré

Tout en fixant ζ , nous allons démontrer que les fibrés \mathcal{Q}_ζ et \mathcal{N}_ζ sont invariants par rapport à une déformation miniversale. Nous allons aussi montrer que l'espace de Kuranishi du fibré \mathcal{N}_ζ est lisse au point correspondant de \mathcal{N}_ζ . Pour $\zeta = 0$, l'espace du module de fibré stable \mathcal{N}_ζ sur \mathbb{P}^{2n+1} est séparable topologiquement au point correspondant au fibré \mathcal{N}_ζ .

5.1. Théorème. (*Hartshorne, [15]*). *Si F est un faisceau cohérent sur un schéma projectif X sur un corps de base K tel que $hdF \leq 1$, il existe un schéma $Y = \text{Spec}(R)$ qui paramétrise les déformations miniversales de F , où R est une K -algèbre locale complète.*

Démonstration. Voir le théorème (19.1 [15]). □

5.2. Théorème. *Soit E un fibré vectoriel sur l'espace projectif \mathbb{P}^n . Il existe $Kur(E)$, un espace de Kuranishi de E , qui est une base de la déformation miniversale de E . Autrement dit, $Kur(E)$ paramétrise toutes les déformations miniversales de E .*

Démonstration. Voir l'article de M. Kuranishi [20]. □

Soit e un point correspondant au fibré E . Alors l'espace $Kur(E)$ est équipé d'une famille universelle. La fibre $(Kur(E), e)$, un espace topologique pointé, est unique à un automorphisme près.

5.3. Lemme. *Soient \mathcal{Q}'_ζ et \mathcal{Q}''_ζ deux fibrés de quotient pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} qui sont définis par les suites exactes suivantes*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma - \zeta) \longrightarrow \mathcal{H}_\zeta \xrightarrow{q_1} \mathcal{Q}'_\zeta \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma - \zeta) \longrightarrow \mathcal{H}_\zeta \xrightarrow{q_2} \mathcal{Q}''_\zeta \longrightarrow 0$$

tels qu'il existe un morphisme $\psi : \mathcal{Q}'_\zeta \longrightarrow \mathcal{Q}''_\zeta$. Alors il existe un morphisme $\varphi : \mathcal{H}_\zeta \longrightarrow \mathcal{H}_\zeta$ tel que $q_2 \circ \varphi = \psi \circ q_1$.

Démonstration. De la deuxième suite, on obtient la suite exacte suivante

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{H}_\zeta, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma - \zeta)) &\longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{H}_\zeta, \mathcal{H}_\zeta) \xrightarrow{q_2 \circ \bullet} \text{Hom}(\mathcal{H}_\zeta, \mathcal{Q}''_\zeta) \\ &\longrightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{H}_\zeta, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma - \zeta)) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Comme on a

$$\text{Ext}^1(\mathcal{H}_\zeta, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma - \zeta)) = H^1(\mathcal{H}_\zeta^*(-\gamma - \zeta)) = 0,$$

alors on obtient que

$$\text{Hom}(\mathcal{H}_\zeta, \mathcal{H}_\zeta) \xrightarrow{q_2 \circ \bullet} \text{Hom}(\mathcal{H}_\zeta, \mathcal{Q}''_\zeta) \longrightarrow 0$$

Comme on a le morphisme $\psi \circ q_1 : \mathcal{H}_\zeta \longrightarrow \mathcal{Q}''_\zeta$ qui est dans $\text{Hom}(\mathcal{H}_\zeta, \mathcal{Q}''_\zeta)$, donc il existe un morphisme $\varphi : \mathcal{H}_\zeta \longrightarrow \mathcal{H}_\zeta$ tel que $q_2 \circ \varphi = \psi \circ q_1$. □

5.4. Lemme. Soient $f, f' \in \text{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma - \zeta), \mathcal{H}_\zeta)$ deux morphismes. Alors f et f' donnent le même élément dans le schéma $\text{Quot}_{\mathcal{H}_\zeta/\mathbb{P}^{2n+1}}$ si et seulement s'il existe un isomorphisme $g \in \text{End}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma - \zeta))$ tel que $f = f' \circ g$.

Démonstration. C'est la définition de schéma $\text{Quot}_{\mathcal{H}_\zeta/\mathbb{P}^{2n+1}}$. □

Le théorème suivant est une généralisation du ([2], théorème 3.3) sur \mathbb{P}^{2n+1} .

5.5. Théorème. Soit $\mathcal{Q}_{\zeta,0}$ un fibré de quotient pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} qui est défini par la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma - \zeta) \xrightarrow{x_0} \mathcal{H}_\zeta \longrightarrow \mathcal{Q}_{\zeta,0} \longrightarrow 0$$

où $x_0 \in \text{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma - \zeta), \mathcal{H}_\zeta)$. Alors chaque déformation miniversale de fibré $\mathcal{Q}_{\zeta,0}$ est encore un fibré de quotient pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} . L'espace de Kuranishi de $\mathcal{Q}_{\zeta,0}$ est lisse au point correspondant de $\mathcal{Q}_{\zeta,0}$.

Démonstration. Soient $x_0 \in \text{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma - \zeta), \mathcal{H}_\zeta)$ et $\mathcal{Q}_{\zeta,0} = \text{coker}(x_0)$ le fibré vectoriel quotient pondéré correspondant au x_0 . Soit X un composant irréductible de $\text{Quot}_{\mathcal{H}_\zeta/\mathbb{P}^{2n+1}}$ tel que $x_0 \in X$ et $y_0 \in \text{Kur}(\mathcal{Q}_{\zeta,0})$ correspondant au fibré $\mathcal{Q}_{\zeta,0}$. On a le morphisme de fibres suivant

$$\pi : (X, x_0) \longrightarrow (\text{Kur}(\mathcal{Q}_{\zeta,0}), y_0)$$

D'après le théorème 3.12, page 137 [26], on a

$$\dim_{y_0}(\text{Kur}(\mathcal{Q}_{\zeta,0})) \geq \dim_{x_0}(X) - \dim_{x_0}(\pi^{-1}(y_0)).$$

D'après le théorème 2.2, page 126 [26], on a $h^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{Q}_{\zeta,0})) \geq \dim_{y_0}(\text{Kur}(\mathcal{Q}_{\zeta,0}))$. Soit

$$Z = \{x_1 \in X \mid \mathcal{Q}_{\zeta,1} \simeq \mathcal{Q}_{\zeta,0} \text{ où } \mathcal{Q}_{\zeta,1} \text{ est le fibré correspondant à } x_1\}.$$

On obtient que

$$(\pi^{-1}(y_0), y_0) \subseteq (Z, x_0) \text{ et } \dim_{x_0}((\pi^{-1}(y_0), y_0)) \leq \dim_{x_0}((Z, x_0)).$$

Donc on a

$$\dim_{y_0}(\text{Kur}(\mathcal{Q}_{\zeta,0})) \geq \dim_{x_0}(X) - \dim_{x_0}((Z, x_0)).$$

On a aussi $\dim_{x_0}(X) = h^0(\mathcal{H}_\zeta(\gamma + \zeta)) - 1 = h^0(\mathcal{Q}_{\zeta,0}(\gamma + \zeta))$. Soit

$$\Sigma = \{\psi \in \text{End}(\mathcal{H}_\zeta) \mid \psi.x_0 = x_0\}.$$

D'après les lemmes 5.3 et 5.4, on obtient que

$$\dim_{x_0}(Z) = h^0(\mathcal{E}nd(\mathcal{H}_\zeta)) - \dim_{x_0}(\Sigma) - 1.$$

De la suite exacte de fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow \mathcal{Q}_{\zeta,0}^* \otimes \mathcal{H}_\zeta \longrightarrow \mathcal{E}nd(\mathcal{H}_\zeta) \longrightarrow \mathcal{H}_\zeta(\gamma + \zeta) \longrightarrow 0,$$

on obtient la suite exacte suivante de groupes cohomologiques

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{Q}_{\zeta,0}^* \otimes \mathcal{H}_\zeta) \longrightarrow \text{End}(\mathcal{H}_\zeta) \xrightarrow{\bullet \circ x_0} H^0(\mathcal{H}_\zeta(\gamma + \zeta)),$$

qui nous donne

$$\dim_{x_0}(\Sigma) = h^0(\mathcal{Q}_{\zeta,0}^* \otimes \mathcal{H}_{\zeta}).$$

De la suite exacte précédente de fibrés vectoriels, on obtient que

$$h^1(\mathcal{Q}_{\zeta,0}^* \otimes \mathcal{H}_{\zeta}) = h^0(\mathcal{H}_{\zeta}(\gamma + \zeta)) - h^0(\mathcal{E}nd(\mathcal{H}_{\zeta})) + h^0(\mathcal{Q}_{\zeta,0}^* \otimes \mathcal{H}_{\zeta}).$$

Donc on a

$$\dim_{y_0}(\text{Kur}(\mathcal{Q}_{\zeta,0})) \geq h^0(\mathcal{H}_{\zeta}(\gamma + \zeta)) - h^0(\mathcal{E}nd(\mathcal{H}_{\zeta})) + h^0(\mathcal{Q}_{\zeta,0}^* \otimes \mathcal{H}_{\zeta}) = h^1(\mathcal{Q}_{\zeta,0}^* \otimes \mathcal{H}_{\zeta}).$$

La suite exacte suivante des fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow \mathcal{Q}_{\zeta,0}^*(-\gamma - \zeta) \longrightarrow \mathcal{Q}_{\zeta,0}^* \otimes \mathcal{H}_{\zeta} \longrightarrow \mathcal{E}nd(\mathcal{Q}_{\zeta,0}) \longrightarrow 0$$

nous donne que $h^2(\mathcal{E}nd(\mathcal{Q}_{\zeta,0})) = 0$ et $H^1(\mathcal{Q}_{\zeta,0}^* \otimes \mathcal{H}_{\zeta}) \longrightarrow H^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{Q}_{\zeta,0})) \longrightarrow 0$. Donc on a $h^1(\mathcal{Q}_{\zeta,0}^* \otimes \mathcal{H}_{\zeta}) \geq h^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{Q}_{\zeta,0}))$. Ensuite on obtient que

$$\dim_{y_0}(\text{Kur}(\mathcal{Q}_{\zeta,0})) \geq h^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{Q}_{\zeta,0})).$$

Autrement dit, $\dim_{y_0}(\text{Kur}(\mathcal{Q}_{\zeta,0})) = h^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{Q}_{\zeta,0}))$ et $\text{Kur}(\mathcal{Q}_{\zeta,0})$ est lisse en y_0 . De plus on a

$$\dim_{y_0}(\text{Kur}(\mathcal{Q}_{\zeta,0})) = \dim_{x_0}(X) - \dim_{x_0}(\pi^{-1}(y_0)).$$

D'après le théorème de la semicontinuité de fibres (12.8, page 288 [14]), on obtient que $\dim_{y_0}(\text{Im}(\pi)) = \dim_{y_0}(\text{Kur}(\mathcal{Q}_{\zeta,0}))$ et que π est surjectif. Cela implique que $\mathcal{Q}_{\zeta,0}$ est invariant par rapport à une déformation miniversale.

□

5.6. Lemme. Soit \mathcal{Q}_{ζ} un fibré de quotient pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} . Soient $\mathcal{N}_{\zeta}'^*$ et $\mathcal{N}_{\zeta}''^*$ des fibrés de 0-corrélation pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} qui sont définis par les suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma) \longrightarrow \mathcal{Q}_{\zeta}^* \xrightarrow{p_1} \mathcal{N}_{\zeta}'^* \longrightarrow 0,$$

et

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma) \longrightarrow \mathcal{Q}_{\zeta}^* \xrightarrow{p_2} \mathcal{N}_{\zeta}''^* \longrightarrow 0.$$

tels qu'il existe un morphisme $\psi : \mathcal{N}_{\zeta}'^* \longrightarrow \mathcal{N}_{\zeta}''^*$. Alors il existe un morphisme $\varphi : \mathcal{Q}_{\zeta}^* \longrightarrow \mathcal{Q}_{\zeta}^*$ tel que $p_2 \circ \varphi = \psi \circ p_1$.

Démonstration. De la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma) \longrightarrow \mathcal{Q}_{\zeta}^* \xrightarrow{p_2} \mathcal{N}_{\zeta}''^* \longrightarrow 0,$$

on obtient la suite exacte suivante de groupes cohomologiques

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{Q}_{\zeta}^*, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma)) &\longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{Q}_{\zeta}^*, \mathcal{Q}_{\zeta}^*) \xrightarrow{p_2 \circ \bullet} \text{Hom}(\mathcal{Q}_{\zeta}^*, \mathcal{N}_{\zeta}''^*) \\ &\longrightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{Q}_{\zeta}^*, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma)) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Comme on a

$$\text{Ext}^1(\mathcal{Q}_{\zeta}^*, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma)) = H^1(\mathcal{Q}_{\zeta}(-\gamma)) = 0,$$

alors on obtient que

$$\text{Hom}(\mathcal{Q}_{\zeta}^*, \mathcal{Q}_{\zeta}^*) \xrightarrow{p_2 \circ \bullet} \text{Hom}(\mathcal{Q}_{\zeta}^*, \mathcal{N}_{\zeta}''^*) \longrightarrow 0.$$

Comme on a le morphisme $\psi \circ p_1 : \mathcal{Q}_\zeta^* \longrightarrow \mathcal{N}_\zeta^{\prime\prime*}$ qui est dans $\text{Hom}(\mathcal{Q}_\zeta^*, \mathcal{N}_\zeta^{\prime\prime*})$, donc il existe un morphisme $\varphi : \mathcal{Q}_\zeta^* \longrightarrow \mathcal{Q}_\zeta^*$ tel que $p_2 \circ \varphi = \psi \circ p_1$.

□

5.7. Lemme. Soit \mathcal{Q}_ζ un fibré de quotient pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} . Soient f, f' deux morphismes dans $\text{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma), \mathcal{Q}_\zeta^*)$. Alors f et f' donnent le même élément dans $\text{Quot}_{\mathcal{Q}_\zeta^*/\mathbb{P}^{2n+1}}$ si et seulement s'il existe un isomorphisme $g \in \text{End}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma))$ tel que $f = f' \circ g$.

Démonstration. C'est la définition de schéma $\text{Quot}_{\mathcal{Q}_\zeta^*/\mathbb{P}^{2n+1}}$.

□

Le théorème suivant est une généralisation du ([2], théorème 4.4) sur \mathbb{P}^{2n+1} .

5.8. Théorème. Soient \mathcal{Q}_ζ le fibré de quotient pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} et $\mathcal{N}_{\zeta,0}$ le fibré de 0-corrélation pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} qui sont définis par les suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma) \xrightarrow{g_0} \mathcal{Q}_\zeta^* \longrightarrow \mathcal{N}_{\zeta,0}^* \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma - \zeta) \longrightarrow \mathcal{H}_\zeta \longrightarrow \mathcal{Q}_\zeta \longrightarrow 0,$$

où $g_0 \in \text{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma), \mathcal{Q}_\zeta^*)$. Alors chaque déformation miniversale de fibré $\mathcal{N}_{\zeta,0}$ est encore un fibré de 0-corrélation pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} . L'espace de Kuranishi de $\mathcal{N}_{\zeta,0}$ est lisse au point correspondant de $\mathcal{N}_{\zeta,0}$.

Démonstration. Soient $g_0 \in \text{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma), \mathcal{Q}_\zeta^*)$ et $\mathcal{N}_{\zeta,0}^* = \text{coker}(g_0)$ un fibré vectoriel quotient de \mathcal{Q}_ζ^* correspondant au g_0 . Soit $Y \subseteq \text{Quot}_{\mathcal{Q}_\zeta^*/\mathbb{P}^{2n+1}}$ un composant irréductible de $\text{Quot}_{\mathcal{Q}_\zeta^*/\mathbb{P}^{2n+1}}$ tel que $g_0 \in Y$. Soient $x \in \text{Kur}(\mathcal{Q}_\zeta)$ correspondant au fibré \mathcal{Q}_ζ et $z_0 \in \text{Kur}(\mathcal{N}_{\zeta,0})$ correspondant au fibré $\mathcal{N}_{\zeta,0}$.

$$\begin{array}{ccc} (Y, g_0) & \xrightarrow{\Psi} & (\text{Kur} \mathcal{Q}_\zeta, x) \\ \downarrow \Phi & & \\ (\text{Kur} \mathcal{N}_{\zeta,0}, z_0) & & \end{array}$$

D'après le théorème 5.5, pour le morphisme Ψ , on a

$$\dim_{g_0}(Y) = \dim_x(\text{Kur}(\mathcal{Q}_\zeta)) + \dim_{g_0}(\Psi^{-1}(x)),$$

et $\dim_x(\text{Kur}(\mathcal{Q}_\zeta)) = h^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{Q}_\zeta))$. La dimension de la fibre du morphisme Ψ est égale à $h^0(\mathcal{Q}_\zeta^*(\gamma)) - h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}})$, donc on obtient

$$\dim_{g_0}(Y) = h^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{Q}_\zeta)) + h^0(\mathcal{Q}_\zeta^*(\gamma)) - 1.$$

En faisant la même chose comme dans le théorème 5.5 on obtient, pour le morphisme Φ ,

$$h^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{N}_{\zeta,0})) \geq \dim_{z_0}(\text{Kur}(\mathcal{N}_{\zeta,0})) \geq \dim_{g_0}(Y) - \dim_{g_0}(\Phi^{-1}(z_0)).$$

Soit $Z = \{g_1 \in Y \mid \mathcal{N}_{\zeta,1}^* \simeq \mathcal{N}_{\zeta,0}^* \text{ où } \mathcal{N}_{\zeta,1}^* \text{ est le fibré correspondant à } g_1\}$. On obtient que

$$(\Phi^{-1}(z_0), g_0) \subseteq (Z, g_0) \text{ et } \dim_{g_0}((\Phi^{-1}(z_0), g_0)) \leq \dim_{g_0}((Z, g_0)).$$

Donc on a

$$\dim_{z_0}(Kur(\mathcal{N}_{\zeta,0})) \geq \dim_{g_0}(Y) - \dim_{g_0}((Z, g_0)).$$

Soit $\Sigma = \{\sigma \in \text{End}(\mathcal{Q}_{\zeta}) \mid \sigma.g_0 = g_0\}$. D'après les lemmes 5.6 et 5.7, on obtient alors que

$$\dim_{g_0}(Z) = h^0(\text{End}(\mathcal{Q}_{\zeta})) - \dim_{g_0}(\Sigma) - 1.$$

En considérant la suite exacte suivante de fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow \mathcal{Q}_{\zeta}^* \otimes \mathcal{N}_{\zeta,0} \longrightarrow \text{End}(\mathcal{Q}_{\zeta}) \longrightarrow \mathcal{Q}_{\zeta}^*(\gamma) \longrightarrow 0,$$

on obtient la suite exacte suivante de groupes cohomologiques

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{Q}_{\zeta}^* \otimes \mathcal{N}_{\zeta,0}) \longrightarrow \text{End}(\mathcal{Q}_{\zeta}) \xrightarrow{\bullet \circ g_0} H^0(\mathcal{Q}_{\zeta}^*(\gamma)),$$

qui nous donne $\dim_{g_0}(\Sigma) = h^0(\mathcal{Q}_{\zeta}^* \otimes \mathcal{N}_{\zeta,0})$. Donc on obtient que

$$\dim_{z_0}(Kur(\mathcal{N}_{\zeta,0})) \geq h^1(\text{End}(\mathcal{Q}_{\zeta})) + h^0(\mathcal{Q}_{\zeta}^*(\gamma)) - h^0(\text{End}(\mathcal{Q}_{\zeta})) + h^0(\mathcal{Q}_{\zeta}^* \otimes \mathcal{N}_{\zeta,0}).$$

De la suite exacte précédente de fibrés vectoriels, on obtient que

$$\begin{aligned} \dim_{z_0}(Kur(\mathcal{N}_{\zeta,0})) &\geq h^1(\text{End}(\mathcal{Q}_{\zeta})) + h^0(\mathcal{Q}_{\zeta}^*(\gamma)) - h^0(\text{End}(\mathcal{Q}_{\zeta})) + h^0(\mathcal{Q}_{\zeta}^* \otimes \mathcal{N}_{\zeta,0}) = \\ &= h^1(\mathcal{Q}_{\zeta}^* \otimes \mathcal{N}_{\zeta,0}) - h^2(\mathcal{Q}_{\zeta}^* \otimes \mathcal{N}_{\zeta,0}) + h^1(\mathcal{Q}_{\zeta}^*(\gamma)) + h^2(\text{End}(\mathcal{Q}_{\zeta})). \end{aligned}$$

et

$$\dots \longrightarrow H^1(\mathcal{Q}_{\zeta}^*(\gamma)) \longrightarrow H^2(\mathcal{Q}_{\zeta}^* \otimes \mathcal{N}_{\zeta,0}) \longrightarrow H^2(\text{End}(\mathcal{Q}_{\zeta})) \longrightarrow \dots$$

Donc on obtient que $h^2(\mathcal{Q}_{\zeta}^* \otimes \mathcal{N}_{\zeta,0}) \leq h^2(\text{End}(\mathcal{Q}_{\zeta})) + h^1(\mathcal{Q}_{\zeta}^*(\gamma))$ et que

$$\dim_{z_0}(Kur(\mathcal{N}_{\zeta,0})) \geq h^1(\mathcal{Q}_{\zeta}^* \otimes \mathcal{N}_{\zeta,0}).$$

En considérant la suite exacte suivante de fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_{\zeta,0}(-\gamma) \longrightarrow \mathcal{Q}_{\zeta}^* \otimes \mathcal{N}_{\zeta,0} \longrightarrow \text{End}(\mathcal{N}_{\zeta,0}) \longrightarrow 0,$$

on obtient que

$$\dots \longrightarrow H^1(\mathcal{Q}_{\zeta}^* \otimes \mathcal{N}_{\zeta,0}) \longrightarrow H^1(\text{End}(\mathcal{N}_{\zeta,0})) \longrightarrow H^2(\mathcal{N}_{\zeta,0}(-\gamma)) \longrightarrow \dots$$

Donc on a

$$h^1(\text{End}(\mathcal{N}_{\zeta,0})) \leq h^1(\mathcal{Q}_{\zeta}^* \otimes \mathcal{N}_{\zeta,0}) + h^2(\mathcal{N}_{\zeta,0}(-\gamma)) = h^1(\mathcal{Q}_{\zeta}^* \otimes \mathcal{N}_{\zeta,0})$$

et

$$\dim_{z_0}(Kur(\mathcal{N}_{\zeta,0})) \geq h^1(\text{End}(\mathcal{N}_{\zeta,0})).$$

Alors on a $\dim_{z_0}(Kur(\mathcal{N}_{\zeta,0})) = h^1(\text{End}(\mathcal{N}_{\zeta,0}))$ et $Kur(\mathcal{N}_{\zeta,0})$ est lisse en z_0 . De plus on a

$$\dim_{z_0}(Kur(\mathcal{N}_{\zeta,0})) = \dim_{g_0}(Y) - \dim_{g_0}(\Phi^{-1}(z_0)).$$

D'après le théorème de la semicontinuité de fibres (12.8, page 288 [14]), on obtient que $\dim_{z_0}(\text{Im}(\Phi)) = \dim_{z_0}(Kur(\mathcal{N}_{\zeta,0}))$ et que Φ est surjectif. Cela implique que $\mathcal{N}_{\zeta,0}$ est invariant par rapport à une déformation miniversale.

□

5.9. Théorème. ([19], théorème 6.4). Soient E et E' deux fibrés vectoriels simples non-isomorphiques sur \mathbb{P}^m . Si les points associés aux fibrés E et E' sont non-séparables (topologiquement) dans l'espace du module de fibrés simples, alors il existe deux morphismes non-triviaux

$$\varphi : E \longrightarrow E', \quad \psi : E' \longrightarrow E$$

tels que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = 0$.

Démonstration. voir [19]. □

5.10. Proposition. ([23], Lemme 1.2.8). Soient E et E' deux fibrés vectoriels semi-stables tels que $\text{rg}(E') = \text{rg}(E)$ et $c_1(E') = c_1(E)$ sur \mathbb{P}^m . Soit $\varphi : E \longrightarrow E'$ un morphisme non-trivial. Si au moins un des deux fibrés est stable, alors φ est un isomorphisme.

Démonstration. voir [23]. □

5.11. Proposition. Soient $\mathcal{Q}_\zeta, \mathcal{Q}'_\zeta$ des fibrés de quotient pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} et $\mathcal{N}_\zeta, \mathcal{N}'_\zeta$ des fibrés de 0-corrélation pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} qui sont définis par les suites exactes, pour $\zeta = 0$,

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma) \longrightarrow \mathcal{H}_\zeta \longrightarrow \mathcal{Q}_\zeta \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma) \longrightarrow \mathcal{H}_\zeta \longrightarrow \mathcal{Q}'_\zeta \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma) \longrightarrow \mathcal{Q}_\zeta^* \xrightarrow{q} \mathcal{N}_\zeta \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma) \longrightarrow \mathcal{Q}'_\zeta{}^* \xrightarrow{q'} \mathcal{N}'_\zeta \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Soit $\gamma > (2n+1)\lambda_n$. Alors les points associés aux $\mathcal{N}_\zeta, \mathcal{N}'_\zeta$ sont séparables dans l'espace du module $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^{2n+1}}$.

Démonstration. On fixe $\gamma > (2n+1)\lambda_n \geq \sum_{i=0}^n \lambda_i$. Supposons que les points associés aux $\mathcal{N}_\zeta, \mathcal{N}'_\zeta$ sont non-séparables dans l'espace de module $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^{2n+1}}$. D'après la proposition 5.9, il existe deux morphismes non-triviaux

$$\varphi : \mathcal{N}_\zeta \longrightarrow \mathcal{N}'_\zeta, \quad \psi : \mathcal{N}'_\zeta \longrightarrow \mathcal{N}_\zeta$$

tels que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = 0$. En utilisant la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma) \longrightarrow \mathcal{Q}'_\zeta{}^* \xrightarrow{q'} \mathcal{N}'_\zeta \longrightarrow 0,$$

on obtient la suite exacte suivante de groupes cohomologiques

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{Q}_\zeta^*, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma)) \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{Q}_\zeta^*, \mathcal{Q}'_\zeta{}^*) \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{Q}_\zeta^*, \mathcal{N}'_\zeta) \\ &\longrightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{Q}_\zeta^*, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma)). \end{aligned}$$

Comme on a

$$\text{Ext}^1(\mathcal{Q}_\zeta^*, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma)) = H^1(\mathcal{Q}_\zeta(-\gamma)) = 0,$$

alors on obtient

$$\text{Hom}(\mathcal{Q}_\zeta^*, \mathcal{Q}'_\zeta{}^*) \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{Q}_\zeta^*, \mathcal{N}'_\zeta) \longrightarrow 0.$$

Donc, pour le morphisme

$$\varphi \circ q : \mathcal{Q}_\zeta^* \xrightarrow{q} \mathcal{N}_\zeta \xrightarrow{\varphi} \mathcal{N}'_\zeta$$

il existe $0 \neq \rho \in \text{Hom}(\mathcal{Q}_\zeta^*, \mathcal{Q}'_\zeta^*)$ tel que $q' \circ \rho = \varphi \circ q$. D'après la proposition 3.3 $\mathcal{Q}'_\zeta^*, \mathcal{Q}_\zeta^*$ sont stables. D'après la proposition 5.10, on obtient que le morphisme ρ est un isomorphisme. Donc on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Q}_\zeta^* & \xrightarrow{q} & \mathcal{N}_\zeta \longrightarrow 0 \\ \rho \downarrow \wr & & \downarrow \varphi \\ \mathcal{Q}'_\zeta^* & \xrightarrow{q'} & \mathcal{N}'_\zeta \longrightarrow 0 \end{array}$$

En répétant les mêmes procédures précédentes pour le morphisme $\psi : \mathcal{N}'_\zeta \longrightarrow \mathcal{N}_\zeta$, tout en utilisant la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma) \longrightarrow \mathcal{Q}_\zeta^* \xrightarrow{q} \mathcal{N}_\zeta \longrightarrow 0,$$

on obtient alors un isomorphisme $0 \neq \rho' \in \text{Hom}(\mathcal{Q}'_\zeta^*, \mathcal{Q}_\zeta^*)$ tel que le carré suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Q}'_\zeta^* & \xrightarrow{q'} & \mathcal{N}'_\zeta \longrightarrow 0 \\ \rho' \downarrow \wr & & \downarrow \psi \\ \mathcal{Q}_\zeta^* & \xrightarrow{q} & \mathcal{N}_\zeta \longrightarrow 0. \end{array}$$

Donc on a le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma) & \longrightarrow & \mathcal{Q}_\zeta^* & \xrightarrow{q} & \mathcal{N}_\zeta \longrightarrow 0 \\ & & & & \rho \downarrow \wr & & \downarrow \varphi \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma) & \longrightarrow & \mathcal{Q}'_\zeta^* & \xrightarrow{q'} & \mathcal{N}'_\zeta \longrightarrow 0 \\ & & & & \rho' \downarrow \wr & & \downarrow \psi \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma) & \longrightarrow & \mathcal{Q}_\zeta^* & \xrightarrow{q} & \mathcal{N}_\zeta \longrightarrow 0 \end{array}$$

tel que $q \circ \rho' \circ \rho = \psi \circ \varphi \circ q = 0$. Donc on a le morphisme suivant qui est défini, pour tout $x \in \mathbb{P}^{2n+1}$, par

$$\begin{aligned} g_x : \mathcal{Q}_{\zeta x}^* &\longrightarrow (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma))_x \longrightarrow 0 \\ z &\longmapsto \rho' \circ \rho(z). \end{aligned}$$

Alors on a le morphisme $0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \xrightarrow{g^*} \mathcal{Q}_\zeta(-\gamma)$, c'est-à-dire on a une section de fibré $\mathcal{Q}_\zeta(-\gamma)$. Ce qui est une contradiction au fait que $H^0(\mathcal{Q}_\zeta(-\gamma)) = 0$.

□

RÉFÉRENCES

- [1] Ancona, V. Ottaviani, G. *Stability of special instanton bundles on \mathbb{P}^{2n+1}* . Trans. of the Amer. Math. Soc. 341, 2 (1994), 677-693.
- [2] Ancona, V. Ottaviani, G. *β -bundles on \mathbb{P}^5* . (1993).
- [3] Ancona, V. Ottaviani, G. *On moduli of instanton bundles on \mathbb{P}^{2n+1}* . Pacific J. of Math. 171, 2 (1995), 343-351.
- [4] Atiyah, M.F. *Geometry on Yang-Mills fields*, Scuola Normale Superiore Pisa, Pisa, 1979, 99 pp.
- [5] Atiyah, M.F. R.S. Ward. *Instantons and algebraic geometry*, Comm. Math. Phys. 55 (1977), 117-124.
- [6] Atiyah, M. Drinfeld, V. Hitchin, N. and Manin, Y. *Construction of instantons*, Phys. Lett., 65A(1978), pp. 185-187.
- [7] Bohnhorst, G. Spindler, H. *The stability of certain vector bundles on \mathbb{P}^n* . Complex algebraic varieties (Bayreuth, 1990), 39-50, Lect. Notes in Math. , 1507, Springer, Berlin, 1992.
- [8] Brinzănescu, V. *Holomorphic Vector Bundles over Compact Complex Surfaces*. Lect. Notes in Math. 1624. Springer-Verlag, Berlin (1996).
- [9] Cascini, P. *Weighted Tango bundles on \mathbb{P}^n and their moduli spaces*. Forum Math. 13(2001), 251-260.
- [10] Dionisi, C. *Symplectic Small Deformations of Special Instanton Bundle on \mathbb{P}^{2n+1}* . Ann. di Mat. pura et appl. 175 (1998), 285-293.
- [11] Douady, A. Verdier, J.-L. editors. *Les équations de Yang-Mills. Séminaire E.N.S. 1977-1978*, Astérisque 71-72. Paris: Soc. Math. France, 1980.
- [12] Ein, L. *generalized null correlation bundles*. Nagoya Math. J. Vol. HI (1988), 13-24.
- [13] Fulton, W. *Intersection Theory*. Springer-Verlag, Berlin (1998).
- [14] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry*. Grada. Texte in Math. 52. Springer-Verlag, Berlin (1977).
- [15] Hartshorne, R. *Deformation theory*. Grada. Texte in Math. 257. Springer New York (2010).
- [16] Husemoller, D. *Fibre Bundles*. Third edition. Grad. Texts in Math. 20. Springer-Verlag, New York (1994).
- [17] Huybrecht, D. lehn, M. *The geometry of moduli space of sheaves*. Seco. edition. Cambr. Univ. Press. 2010.
- [18] Jardim, M. Mirò-Roig, R. M. *On the semistability of instanton sheaves over certain projective varieties*. Comm. in Algebra 36 (2008), 288-298.
- [19] Kosarew, S. Okonek, C. *Global Moduli Spaces and Simple Holomorphic Bundles*. Publ. RIMS, Kyoto Univ. 25 (1989), 1-19.
- [20] Kuranishi, M. *New proof for the existence of locally complete families of complex structures*. Proceedings of the Conference on Complex Analysis 1965, pp 142-154.
- [21] Le Potier, J. *Lectures on vector bundles*. Cambridge Studies in Adv. Math. 54. Cambridge University Press (1997).
- [22] Migliore, C. Nagel, U. Peterson, C. *Buchsbaum-Rim Sheaves and Their Multiple Sections*. Journal of Algebra 219, 378- 420. (1999).
- [23] Okonek, C. Schneider, M. Spindler, H. *Vector Bundles on Complex Projective Spaces With an Appendix by S. I. Gelfand*. Progress in Math. 3. Birkhäuser (1980).
- [24] Okonek, C. Spindler, H. *Mathematical instanton bundles on P^{2n+1}* , J. Reine Angew. Math., 364 (1986), pp. 3550.
- [25] Ottaviani, G. Trautmann, G. *The tangent space at a special symplectic instanton bundle on \mathbb{P}^{2n+1}* . Manuscripta Math. 85, no. 1 (1994), 97-107.
- [26] Qing, L. *Algebraic Geometry and arithmetic curves*. Oxford University Press, New York (2002).
- [27] Salamon, S.M. *Quaternionic structures and twistor spaces*. In T.J. Willmore and N.J. Hitchin, editors, Global Riemannian geometry (Durham 1982), pages 6574, 1984.
- [28] Spindler, H. Trautmann, G. *Special instanton bundles on \mathbb{P}^{2n+1} , their geometry and their moduli*. Math. Ann. 1990, Volume 286, Iss. 1-3, pp. 559-592.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU, CASE 247, 4 PLACE JUSSIEU,
F-75252 PARIS, FRANCE

E-mail address: mohamed.bahtiti@imj-prg.fr